

Th.s Toán học - Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC - Chủ biên  
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIÊN KHẢI  
LÊ BÍCH NGỌC  
LÊ HỮU TRÍ

# Để học tốt TOÁN

Ta có :

$$1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$$
$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right)^m \geq 2^m \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

8

TẬP 2

- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô giáo và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.s Toán học – Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC – Chủ biên  
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIÊN KHẢI  
LÊ BÍCH NGỌC  
LÊ HỮU TRÍ

# ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 8

TẬP 2

- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

# GIỚI THIỆU CHUNG

*Xin trân trọng giới thiệu tới các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh, cùng toàn thể các Em học sinh bộ sách:*

## **RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN THCS**

*do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.*

*Bộ tài liệu gồm 9 cuốn :*

- Cuốn 1:** Toán 6 – Tập 1
- Cuốn 2:** Toán 6 – Tập 2
- Cuốn 3:** Toán 7 – Tập 1
- Cuốn 4:** Toán 7 – Tập 2
- Cuốn 5:** Toán 8 – Tập 1
- Cuốn 6:** Toán 8 – Tập 2
- Cuốn 7:** Toán 9 – Tập 1
- Cuốn 8:** Toán 9 – Tập 2

*Bộ sách được viết theo chương trình sách giáo khoa mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo dựa trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp giải Toán THCS.*

*Mục tiêu của bộ sách:*

- 1. Cung cấp cho các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh một bộ giáo án có chất lượng về mặt sư phạm và chứa đựng đầy đủ kiến thức cơ bản cũng như chuyên sâu, để sau khi tham khảo có thể chuyển đổi ngay thành giáo án mang đi giảng dạy cho học sinh của mình.*
- 2. Cung cấp cho các em học sinh THCS yêu thích môn Toán một bộ sách tự học tập dễ hiểu và bổ ích. Nó chắc chắn sẽ trở thành người bạn đồng hành để giúp các Em chủ động hơn trong việc học Toán theo chương trình sách giáo khoa và mở mang kiến thức Toán THCS của bản thân.*

*Các cuốn Toán 6, Toán 7, Toán 8, Toán 9 đều có chung một cấu trúc, bao gồm hai phần:*

**Phần I - Đại số**

**Phần II - Hình học**

*Mỗi phần chứa đựng các chương (chương I, chương II, ...). Ở mỗi chương chứa đựng các chủ đề (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung của sách giáo khoa.*

Mỗi chủ đề đều được chia thành 5 mục:

**I. Kiến thức cơ bản**

Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan (trong hầu hết các trường hợp chúng được bắt đầu bằng phương pháp đặt vấn đề) cùng với những thí dụ minh họa ngay sau đó.

**II. Các ví dụ minh họa**

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kỹ năng giải Toán.

**III. Câu hỏi ôn tập lý thuyết**

**IV. Bài tập đề nghị**

**V. Hướng dẫn - Đáp số**

Như vậy, ở mỗi chủ đề:

1. Với việc trình bày kiến thức cơ bản theo kiểu đặt vấn đề, cũng như thí dụ minh họa ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thầy, Cô giáo. Và với các em học sinh sẽ thấy dễ hiểu kiến thức mới để rồi biết cách trình bày bài. Điều này phù hợp với xu hướng giáo dục mới trong công cuộc cải cách phương pháp dạy và học theo hướng "**Lấy học trò làm trung tâm**".
2. Tiếp đó, tới các ví dụ minh họa có chọn lọc, sẽ giúp các Thầy, Cô giáo dẫn dắt các em học sinh hoàn thiện kiến thức.
3. Đặc biệt là nội dung của các **chú ý, nhận xét** và **yêu cầu** sau mỗi kiến thức cùng với một vài thí dụ và ví dụ sẽ giúp các Thầy, Cô giáo củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo cho các em học sinh, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi "**Tại sao lại nghĩ và làm như vậy?**".
4. Ngoài ra, còn có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này ở trên các lớp 6, 7, 8, 9 tại một số trường THCS của Hà Nội và từ đó đóng góp những nhận xét quý báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được bộ sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.



# MỤC LỤC

## GIỚI THIỆU CHUNG

### PHẦN I – ĐẠI SỐ

#### CHƯƠNG I

#### PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chủ đề 1:	Mở đầu về phương trình .....	7
Chủ đề 2:	Phương trình bậc nhất một ẩn .....	16
Chủ đề 3:	Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$ hoặc $ax = -b$ ...	21
Chủ đề 4:	Phương trình tích .....	25
Chủ đề 5:	Phương trình chứa ẩn ở mẫu .....	36
Chủ đề 6:	Phương trình có hệ số chữ .....	43
Chủ đề 7:	Giải bài toán bằng cách lập phương trình .....	52
Ôn tập cuối chương I .....		61

#### CHƯƠNG II

#### BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chủ đề 1:	Mối liên hệ giữa thứ tự với phép cộng và phép nhân.....	65
Chủ đề 2:	Bất phương trình một ẩn .....	72
Chủ đề 3:	Bất phương trình bậc nhất một ẩn .....	78
Chủ đề 4:	Bất phương trình đưa được về dạng $ax + b > 0$ hoặc $ax > -b$ .....	86
Chủ đề 5:	Bất phương trình có hệ số chữ .....	92
Chủ đề 6:	Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối ..	96
Chủ đề 7:	Bất đẳng thức .....	107
Ôn tập cuối chương II .....		126

### PHẦN II – HÌNH HỌC

#### CHƯƠNG I

#### TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Chủ đề 1:	Định lý Ta - lét trong tam giác .....	133
Chủ đề 2:	Tính chất đường phân giác của tam giác.....	144
Chủ đề 3:	Hai tam giác đồng dạng .....	150
Chủ đề 4:	Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông.....	169
Chủ đề 5:	Ứng dụng thực tế của tam giác đồng dạng .....	176
Ôn tập cuối chương I .....		179

#### CHƯƠNG II

#### HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG – HÌNH CHÓP ĐỀU

Chủ đề 1:	Hình hộp chữ nhật .....	183
Chủ đề 2:	Hình lập phương .....	190
Chủ đề 3:	Hình lăng trụ đứng .....	195
Chủ đề 4:	Hình chóp đều .....	200
Chủ đề 5:	Hình chóp cụt đều ..	205
Ôn tập cuối chương II .....		206

# **P**hần 1

---

---

## **Đại số**

## **CHƯƠNG I -**

# **PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**

Chương này, bao gồm:

- 1. Mở đầu về phương trình**
- 2. Phương trình bậc nhất một ẩn**
- 3. Phương trình chứa ẩn ở mẫu**
- 4. Phương trình tích**
- 5. Phương trình có hệ số chữ (phương trình chứa tham số)**
- 6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình**



# MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

**Thí dụ 1:** Ta gọi các hệ thức:

- $2x + 3 = x - 2$  là một phương trình với ẩn số  $x$ .
- $3y - 2 = y$  là một phương trình với ẩn số  $y$ .

...

từ đó ta có được định nghĩa về phương trình một ẩn:

Một phương trình với ẩn  $x$  có dạng:  $A(x) = B(x)$   
trong đó vế trái  $A(x)$  và vế phải  $B(x)$  là hai biểu thức của cùng một biến  $x$ .

#### **Chú ý:**

1. Hệ thức  $x = m$  (với  $m$  là một số nào đó) cũng là một phương trình. Phương trình này chỉ rõ rằng  $m$  là nghiệm duy nhất của nó.
2. Một phương trình có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ..., nhưng cũng có thể không có nghiệm nào hoặc có vô số nghiệm. Phương trình không có nghiệm nào được gọi là phương trình vô nghiệm.

**Thí dụ 2:** Ta nhận thấy:

1. Phương trình:  $x - 3 = 5$  có một nghiệm  $x = 8$ .
2. Phương trình:  $(x - 1)(x + 2) = 0$  có hai nghiệm  $x = 1$  và  $x = -2$ .
3. Phương trình:  $x(x - 2) = x^2 - 2x$  có vô số nghiệm.
4. Phương trình:  $x^2 + 8 = 0$  vô nghiệm.

### 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình được gọi là *tập nghiệm* của phương trình đó và thường được kí hiệu bởi  $S$ .

**Thí dụ 3:** Tìm tập hợp nghiệm của các phương trình sau:

a.  $x + 3 = 5$ .

b.  $|x| = 1$ .

**Giải**

a. Ta có:  $x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 3 = 2$ .

Vậy, ta được  $S = \{2\}$ .

b. Ta có:  $|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$  hoặc  $x = -1$ .

Vậy, ta được  $S = \{1, -1\}$ .



Khi bài toán yêu cầu *giải một phương trình*, ta phải tìm *tất cả các nghiệm* (hay *tìm tập nghiệm*) của phương trình đó.

**Thí dụ 4:** Giải phương trình:  $x^2 - 4 = 5$ .

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1:* Biến đổi phương trình như sau:

$$x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -3.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm  $x = 3$  hoặc  $x = -3$ .

**Chú ý:** Qua lời giải trên ta nhận thấy phương trình:  $x^2 = a$ , với  $a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$ .

*Cách 2:* Biến đổi phương trình như sau:  $x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -3.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm  $x = 3$  hoặc  $x = -3$ .

**Chú ý:** Qua lời giải trên ta nhận thấy phương trình:

$$A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ hoặc } B = 0 \left( \text{hoặc biết } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \right)$$

### 3. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

*Hai phương trình có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương.*

**Thí dụ 5:** Hai phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

$$x - 2 = 0, \quad (1)$$

$$x + 1 = 3. \quad (2)$$

*Giải*

Giải phương trình (1), ta được:  $x = 2 \Rightarrow S_1 = \{2\}$ .

Giải phương trình (2), ta được:  $x = 2 \Rightarrow S_2 = \{2\}$ .

Vậy, ta thấy  $S_1 = S_2$  do đó hai phương trình đã cho tương đương với nhau.

**Nhận xét:** 1. Như vậy, để xét tính tương đương của hai phương trình đã cho, trong lời giải trên chúng ta đi giải từng phương trình rồi thực hiện phép so sánh hai tập nghiệm, và ở đây vì  $S_1 = S_2$  chúng ta kết luận "Hai phương trình tương đương".

2. Nếu  $S_1 = S_2 = \emptyset$  thì hai phương trình cũng tương đương, do đó "  
Hai phương trình vô nghiệm cũng tương đương với nhau".

**Thí dụ 6:** Hai phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

$$x + 1 = 2, \quad (1)$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0. \quad (2)$$

**Giải**

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

**Cách 1:** Giải phương trình (1), ta được:  $x = 1 \Rightarrow S_1 = \{1\}$ .

Giải phương trình (2), ta được:  $x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 4 - 1)(x - 4 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = 3 \Rightarrow S_2 = \{5, 3\}$$

Vậy, ta thấy  $S_1 \neq S_2$  do đó hai phương trình không tương đương.

**Cách 2:** Giải phương trình (1), ta được:  $x = 1 \Rightarrow S_1 = \{1\}$ .

Thay  $x = 1$  vào phương trình (2), ta được:  $1^2 - 8 \cdot 1 + 15 = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$ , mâu thuẫn tức là,  $x = 1$  không phải là nghiệm của (2).

Vậy, hai phương trình không tương đương.

**Nhận xét:**

1. Như vậy, để xét tính tương đương của hai phương trình đã cho, trong lời giải trên chúng ta đi giải phương trình (1) rồi nhận xét rằng  $x = 1$  không phải là nghiệm của (2) từ đó kết luận "*Hai phương trình tương đương*". Sở dĩ chúng ta lựa chọn hướng làm như vậy là bởi việc giải phương trình (2) là khó khăn.

2. Như vậy, để chứng tỏ hai phương trình không tương đương, ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

**Cách 1:** Tìm tập hợp nghiệm của mỗi phương trình, rồi đưa ra nhận xét về hai tập hợp này.

**Cách 2:** Chỉ ra một giá trị của ẩn là nghiệm của phương trình này nhưng không là nghiệm của phương trình kia.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Tìm tập hợp nghiệm của các phương trình sau:

a.  $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4.$

b.  $\frac{1}{x-1} = 0.$

c.  $|x| = -\frac{1}{2}.$

d.  $2x + 2 = 2x + 3.$

### Giải

- a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(x-2)(x+2) = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 4, \text{ luôn đúng với mọi } x.$$

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \mathbf{R}$ .

- b. Nhận xét rằng:  $VT \neq 0$ , với mọi  $x \neq 1$  do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \emptyset$ .

- c. Nhận xét rằng:  $VT = |x| \geq 0$ , với mọi  $x$ ,

$$VP = -\frac{1}{2}, \text{ luôn âm, do đó phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \emptyset$ .

- d. Nhận xét rằng:  $VT = 2x + 2 < 2x + 3 = VP$ , do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \emptyset$ .

### Nhận xét:

Qua ví dụ trên, chúng ta nhận thấy:

1. ở câu a), bằng việc **đánh giá** được  $VT = VP$  với mọi  $x$ , chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \mathbf{R}$*  ". Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp cho dù có được  $VT = VP$  nhưng lại không thể kết luận được như vậy, thí dụ:

$$\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}.$$

$$\text{Ta cũng có: } VT = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} = VP$$

và trong trường hợp này ta lại kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$*  " Các em học sinh hãy thử lí giải vì sao ?

2. ở câu b), bằng việc **đánh giá** được  $VT \neq 0$  với mọi  $x \neq 1$ , chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \emptyset$*  ".  
3. ở câu c), bằng việc **đánh giá** được  $VT \geq 0$  và  $VP < 0$  với mọi  $x$ , chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \emptyset$*  ".  
4. ở câu d), bằng việc **đánh giá** được  $VT < VP$  với mọi  $x$ , chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \emptyset$*  ".

Cả 4 câu a), b), c), d) đã cho chúng ta làm quen được với việc " *Sử dụng phương pháp đánh giá để giải phương trình* ".

**Ví dụ 2:** Tìm tập nghiệm của phương trình:  $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = x + 1$ .

*Giải*

Nhận xét rằng:

- Với  $x = 0$  thì VT = 0 còn VP = 8, do đó  $x = 0$  không là nghiệm.
- Với  $x < 0$  thì  $\sqrt{x}$  không xác định.
- Với  $x > 0$  thì  $\sqrt{-x}$  không xác định.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm  $S = \emptyset$ .

**Nhận xét:**

Lời giải của ví dụ trên được trình bày theo kiểu *loại dần*. Tuy nhiên, các em học sinh hẳn sẽ thắc mắc "*Tại sao lại biết cách thực hiện như vậy?*". Câu trả lời được lấy ra từ thuật toán chung khi thực hiện công việc giải phương trình, bao gồm các bước:

*Bước 1:* Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình.

*Bước 2:* Giải phương trình.

Và ở đây, khi thực hiện bước 1, ta cần có điều kiện:

$$x \geq 0 \text{ và } -x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ đó việc giải phương trình trong bước 2 chỉ cần thử với  $x = 0$ .

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng phương trình  $x + |x| = 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \leq 0$ .

*Giải*

Nhận xét rằng, với  $x \leq 0$  ta luôn có:  $|x| = -x$  do đó:  $x + |x| = x - x = 0$ .

Vậy, phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi  $x \leq 0$ .

**Ví dụ 4:** Chứng tỏ rằng phương trình  $mx - 3 = 2m - x - 1$  luôn nhận  $x = 2$  làm nghiệm, dù  $m$  lấy bất cứ giá trị nào.

*Giải*

Với  $x = 2$ , ta được: VT =  $m \cdot 2 - 3 = 2m - 3$ ,

$$\text{VP} = 2m - 2 - 1 = 2m - 3,$$

suy ra: VT = VP.

Vậy, phương trình luôn nhận  $x = 2$  làm nghiệm, dù  $m$  lấy bất cứ giá trị nào.

**Ví dụ 5:** Cho phương trình:  $(m^2 - 3m + 2)x^2 = m - 1$ , với  $m$  là tham số.

Chứng minh rằng:

- Với  $m = 1$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- Với  $m = 2$ , phương trình vô nghiệm.
- Với  $m = 0$ , phương trình vô nghiệm.
- Với  $m = 3$ , phương trình nhận  $x = 1$  và  $x = -1$  làm nghiệm.

*Giải*

- Với  $m = 1$ , phương trình có dạng:  $(1^2 - 3.1 + 2)x^2 = 1 - 1 \Leftrightarrow 0x = 0$   
do đó, phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- Với  $m = 2$ , phương trình có dạng:  $(2^2 - 3.2 + 2)x^2 = 2 - 1 \Leftrightarrow 0x = 1$   
do đó, phương trình vô nghiệm.
- Với  $m = 0$ , phương trình có dạng:  $(0^2 - 3.0 + 2)x^2 = 0 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 = -1$

Nhận xét rằng:  $VT \geq 0$

$$VP = -1 < 0$$

nên phương trình vô nghiệm.

- Với  $m = 3$ , phương trình có dạng:

$$(3^2 - 3.3 + 2)x^2 = 3 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

do đó, phương trình nhận  $x = 1$  và  $x = -1$  làm nghiệm.

**Ví dụ 6:** Cho hai phương trình:  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , (1)

$$2x^2 - 5x + 3 = 0. \quad (2)$$

- Chứng minh rằng hai phương trình có nghiệm chung  $x = 1$ .
- Chứng minh rằng  $x = 2$  là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2).
- Chứng minh rằng  $x = \frac{3}{2}$  là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1).
- Hai phương trình đã cho có tương đương với nhau hay không? Vì sao?

*Giải*

- Với  $x = 1$ , ta được:  $1^2 - 3.1 + 2 = 0$ , do đó  $x = 1$  là nghiệm của (1).  
 $2.1^2 - 5.1 + 3 = 0$ , do đó  $x = 1$  là nghiệm của (2).  
Vậy, hai phương trình có nghiệm chung  $x = 1$ .
- Với  $x = 2$ , ta được:  $2^2 - 3.2 + 2 = 0$ , do đó  $x = 2$  là nghiệm của (1).  
 $2.2^2 - 5.2 + 3 = 1$ , do đó  $x = 2$  không là nghiệm của (2).  
Vậy,  $x = 2$  là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2).

c. Thực hiện tương tự câu b).

d. Ta có ngay kết luận hai phương trình không tương đương vì " $x = 2$  là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2)".

**Ví dụ 7:** Chứng tỏ rằng cặp phương trình sau là tương đương:

$$\frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = 0, \quad (1)$$

$$2x - 3 = 0. \quad (2)$$

*Giải*

Nghiệm của phương trình (1) là các giá trị của  $x$  thoả mãn

$$\begin{cases} 4x^2 - 9 = 0 \\ 2x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 3)(2x - 3) = 0 \\ 2x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$$

đó chính là phương trình (2).

Vậy, hai phương trình đã cho tương đương.

**Ví dụ 8:** Cặp phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

$$\frac{x^2}{x} = 1, \quad (1)$$

$$x^2 = x. \quad (2)$$

*Giải*

Nhận xét rằng  $x = 0$  là nghiệm của phương trình (2) nhưng không là nghiệm của phương trình (1).

Vậy, hai phương trình đã cho không tương đương.

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu định nghĩa phương trình ẩn  $x$ .

**Câu hỏi 2:** Nêu định nghĩa tập nghiệm của phương trình.

**Câu hỏi 3:** Thế nào là việc giải một phương trình.

**Câu hỏi 4:** Cho ví dụ phương trình có một nghiệm, có hai nghiệm, có vô số nghiệm, vô nghiệm.

**Câu hỏi 5:** Định nghĩa hai phương trình tương đương.

**Câu hỏi 6:** Cho ví dụ về hai phương trình tương đương và hai phương trình không tương đương.

**Câu hỏi 7:** Hai phương trình vô nghiệm có tương đương với nhau không? Vì sao?



## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho phương trình:  $x^2 - 4 = 0$ .

Cho biết các khẳng định sau là đúng hay sai ?

- a. 2 là nghiệm của phương trình.
- b.  $\{2\}$  là tập hợp nghiệm của phương trình.

**Bài tập 2.** Cho phương trình:  $x^2 = 2x$ .

- a. 0 là nghiệm của phương trình.
- b.  $\{0\}$  là tập hợp nghiệm của phương trình.

**Bài tập 3.** Tìm nghiệm của các phương trình sau:

- a.  $2x - 1 = 2$ .
- b.  $x(x - 4) = 0$ .
- c.  $x^2 = 16$ .
- d.  $2(x - 3) = 2x - 6$ .
- e.  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ .
- f.  $|x| = -x$ .

**Bài tập 4.** Tìm tập nghiệm của phương trình:  $\sqrt{2x} + \sqrt{-x} = 1$ .

**Bài tập 5.** Chứng minh rằng phương trình  $x - |x| = 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \geq 0$ .

**Bài tập 6.** Chứng tỏ rằng phương trình  $2mx - 1 = 2m + x - 2$  luôn nhận  $x = 1$  làm nghiệm, dù  $m$  lấy bất cứ giá trị nào.

**Bài tập 7.** Cho phương trình:  $(m^2 - 5m + 6)x^2 = m - 2$ , với  $m$  là tham số.

Chứng minh rằng:

- a. Với  $m = 2$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- b. Với  $m = 3$ , phương trình vô nghiệm.
- c. Với  $m = 0$ , phương trình vô nghiệm.
- d. Với  $m = 4$ , phương trình nhận  $x = 1$  và  $x = -1$  làm nghiệm.

**Bài tập 8.** Cho hai phương trình:  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , (1)

$$3x^2 - 5x + 2 = 0. \quad (2)$$

- a. Chứng minh rằng hai phương trình có nghiệm chung  $x = 1$ .
- b. Chứng minh rằng  $x = 3$  là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2).
- c. Chứng minh rằng  $x = \frac{2}{3}$  là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1).
- d. Hai phương trình đã cho có tương đương với nhau hay không ? Vì sao ?

**Bài tập 9.** Các cặp phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

- a.  $x - 2 = 2$  và  $2x - 1 = 7$ .
- b.  $x + 1 = 0$  và  $x^2 - 1 = 0$ .
- d.  $2x + 3 = 0$  và  $4x^2 + 12x + 9 = 0$ .
- d.  $|x| = 2$  và  $x^2 = 4$ .
- e.  $2x^2 + 1 = 0$  và  $x^2 + 1 = 0$ .

**Bài tập 10.** Hãy tìm giá trị của hằng số  $a$  biết rằng  $x = 1$  là một nghiệm của phương trình:  $(3x - a)(x + 1) - (x + 2)^2 = 1$ .

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

### Bài tập 1.

- a. " $2$  là nghiệm của phương trình" là câu trả lời đúng, bởi khi thay  $2$  vào phương trình ta được:  $2^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 = 0$ , luôn đúng.
- b. " $\{2\}$  là tập hợp nghiệm của phương trình" là câu trả lời đúng, bởi ngoài  $2$  ra phương trình còn có nghiệm  $x = -2$ .

Nếu với yêu cầu "*Sửa lại cho đúng*" thì ta viết " $\{2, -2\}$  là tập hợp nghiệm của phương trình".

**Bài tập 2.** Học sinh tự làm - Tham khảo bài tập 1.

### Bài tập 3.

- |                        |                     |
|------------------------|---------------------|
| a. $x = \frac{3}{2}$ . | d. Mọi $x$ .        |
| b. $x = 0, x = 4$ .    | e. Mọi $x \neq 1$ . |
| c. $x = \pm 4$ .       | f. Mọi $x \leq 0$ . |

**Bài tập 4.**  $S = \emptyset$ .

**Bài tập 5.** Nhận xét rằng, với  $x \geq 0$  ta luôn có:  $|x| = x$  do đó:  $x - |x| = x - x = 0$ .

Vậy, phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi  $x \geq 0$ .

**Bài tập 6.** Tham khảo ví dụ 4.

**Bài tập 7.** Tham khảo ví dụ 5.

**Bài tập 8.** Tham khảo ví dụ 6.

### Bài tập 9.

a. Nhận thấy rằng:

- Phương trình  $x - 2 = 2$  có tập nghiệm  $S_1 = \{4\}$ .
- Phương trình  $2x - 1 = 7$  có tập nghiệm  $S_2 = \{4\}$ .

Vậy, hai phương trình tương đương.

b. Nhận thấy rằng:

- $x = 1$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 1 = 0$ .
- $x = 1$  không là nghiệm của phương trình  $x + 1 = 0$ .

Vậy, hai phương trình không tương đương.

c. Nhận thấy rằng phương trình :

$$4x^2 + 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0$$

đó chính là phương trình còn lại. Vậy, hai phương trình tương đương.

d. Nhận thấy rằng phương trình :  $|x| = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$

đó chính là phương trình còn lại.

Vậy, hai phương trình tương đương.

e. Nhận thấy rằng:

▪ Phương trình  $2x^2 + 1 = 0$  có tập nghiệm  $S_1 = \{\emptyset\}$ .

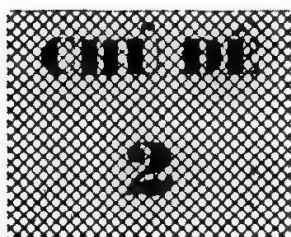
▪ Phương trình  $x^2 + 1 = 0$  có tập nghiệm  $S_2 = \{\emptyset\}$ .

Vậy, hai phương trình tương đương.

**Bài tập 10.** Vì  $x = 1$  là nghiệm của phương trình nên:

$$(3.1 - a)(1 + 1) - (1 + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow 2(3 - a) - 3^2 = 1 \Leftrightarrow 6 - 2a - 9 = 1 \Leftrightarrow a = -2.$$

Vậy, với  $a = -2$  thoả mãn điều kiện đầu bài.



## PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. HAI QUY TẮC BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH

Với các đẳng thức, ta có thể biến đổi:

$$a + b = c \Leftrightarrow a + b - c = 0 \rightarrow \text{chuyển vế và đổi dấu}$$

$$2a + 4b = -2 \Leftrightarrow 1 + 2b = -1 \rightarrow \text{chia cả hai vế cho 2}$$

và với các phương trình chúng ta cũng có được những quy tắc như vậy, cụ thể:

1. (**Quy tắc chuyển vế**): Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
2. (**Quy tắc nhân với một số**): Trong một phương trình, ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số khác 0.

**Thí dụ 1:** Sử dụng hai quy tắc biến đổi phương trình để giải các phương trình sau:

a.  $x^2 + x = x^2$ .

b.  $2x = 1$ .

c.  $3x = x + 8$ .

**Giải**

a. Sử dụng quy tắc chuyển vế, biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 + x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 0$ .

b. Sử dụng quy tắc chia với một số, biến đổi phương trình về dạng:  $x = \frac{1}{2}$ .

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{1}{2}$ .

c. Sử dụng lần lượt các quy tắc, biến đổi phương trình về dạng:

$$3x - x = 8 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 4$ .

**Nhân xét:** Trong lời giải các phương trình trên, chúng ta đã thừa nhận rằng kết quả " Từ một phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân, ta luôn nhận được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho".

## 2. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

**Định nghĩa:** Phương trình:

$$ax + b = 0, \text{ với } a \text{ và } b \text{ là hai số đã cho và } a \neq 0,$$

được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

**Thí dụ 2:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn:

a.  $(m^2 - 1)x^2 + mx + 1 = 0$ .

b.  $mx + (m - 1)y + 2 = 0$ .

**Giải**

a. Để phương trình:  $(m^2 - 1)x^2 + mx + 1 = 0$

là phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với  $m = 1$  hoặc  $m = -1$  phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn  $x$ .

b. Để phương trình:  $mx + (m - 1)y + 2 = 0$

là phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

**Trường hợp 1:** Nó là phương trình bậc nhất một ẩn  $x$  khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

TIỀN

LC / 2363

**Trường hợp 2:** Nó là phương trình bậc nhất một ẩn y khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết luận:

- Với  $m = 1$  phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x.
- Với  $m = 0$  phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn y.

*Phương trình bậc nhất một ẩn được giải như sau:*

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

*Vậy, phương trình bậc nhất  $ax + b = 0$  luôn có nghiệm duy nhất  $x = -\frac{b}{a}$ .*

**Thí dụ 3:** Giải các phương trình sau:

a.  $5x - 3 = 0$ .

b.  $6 - 2x = 0$ .

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:  $5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$ .

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = \frac{3}{5}$ .

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:  $-2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$ .

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 3$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải các phương trình sau:

a.  $7x + 21 = 0$ .

b.  $8 - 6x = 0$ .

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:  $7x = -21 \Leftrightarrow x = -3$ .

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -3$ .

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:  $-6x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ .

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = \frac{4}{3}$ .

**Ví dụ 2:** Cho phương trình:  $(m^2 - 1)x + 1 = m$ .

Giải phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a.  $m = 1$ .

b.  $m = -1$ .

c.  $m = 0$ .

*Giải*

- a. Với  $m = 1$ , phương trình có dạng:  $0.x + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ , luôn đúng với mọi  $x$ .  
Vậy, với  $m = 1$  phương trình nhận mọi  $x$  làm nghiệm.
- b. Với  $m = -1$ , phương trình có dạng:  $0.x + 1 = -1 \Leftrightarrow 1 = -1$ , mâu thuẫn.  
Vậy, với  $m = -1$  phương trình vô nghiệm.
- c. Với  $m = 0$ , phương trình có dạng:  $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$ .  
Vậy, với  $m = 0$  phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu hai quy tắc biến đổi phương trình.

**Câu hỏi 2:** Định nghĩa phương trình bậc nhất một ẩn và cho ví dụ.

**Câu hỏi 3:** Nếu phương pháp giải phương trình bậc nhất một ẩn.

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn:

- a.  $(m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + 3 = 0$ .      b.  $(m - 1)x + (m^2 - 1)y + 4 = 0$ .

**Bài tập 2:** Giải các phương trình sau:

- a.  $3x - 4 = 0$ .      c.  $3 - 7x = 0$ .  
b.  $2x + 13 = 0$ .      d.  $1 + 5x = 0$ .

**Bài tập 3:** Giải các phương trình sau:

- a.  $2x + 16 = 0$ .      c.  $9 - 6x = 0$ .  
b.  $4x + 18 = 0$ .      d.  $-16 - 8x = 0$ .

**Bài tập 4:** Cho phương trình:  $(m^2 - 4)x - 2 = m$ .

Giải phương trình trong mỗi trường hợp sau:

- a.  $m = 2$ .      b.  $m = -2$ .      c.  $m = 1$ .

### V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

- a. Để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$



Vậy, với  $m = -2$  phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn  $x$ .

b. Để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

*Trường hợp 1:* Nó là phương trình bậc nhất một ẩn  $x$  khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

*Trường hợp 2:* Nó là phương trình bậc nhất một ẩn  $y$  khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 = 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq \pm 1 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với  $m = -1$  phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn  $x$ .

### Bài tập 2.

a.  $x = \frac{4}{3}$ .

c.  $x = \frac{3}{7}$ .

b.  $x = -\frac{13}{2}$ .

d.  $x = -\frac{1}{5}$ .

### Bài tập 3.

a.  $x = -8$ .

c.  $x = \frac{3}{2}$ .

b.  $x = -\frac{9}{2}$ .

d.  $x = -2$ .

### Bài tập 4.

a. Với  $m = 2$ , phương trình có dạng:  $0.x - 2 = 2 \Leftrightarrow 0 = 4$ , mâu thuẫn.

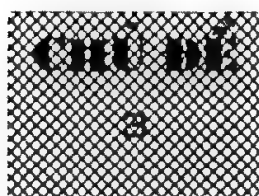
Vậy, với  $m = 2$  phương trình vô nghiệm.

b. Với  $m = -2$ , phương trình có dạng:  $0.x - 2 = -2 \Leftrightarrow -2 = -2$ , luôn đúng.

Vậy, với  $m = -2$  phương trình nhận mọi  $x$  làm nghiệm.

c. Với  $m = 1$ , phương trình có dạng:  $(1 - 4)x - 2 = 1 \Leftrightarrow -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$ .

Vậy, với  $m = 1$  phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -1$ .



## PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG

$$ax + b = 0 \text{ hoặc } ax = -b$$

### I. PHƯƠNG PHÁP

Với những phương trình đưa được về dạng  $ax + b = 0$  thông qua các phép biến đổi đại số thông thường, thí dụ:  $2x - 4 = x + 3 \Leftrightarrow 2x - x = 3 + 4 \Leftrightarrow x = 7$ .

phương pháp giải được minh họa bởi các thí dụ sau:

**Thí dụ 1:** Giải phương trình:  $4(x - 1) - (x + 2) = -x$ .

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} 4x - 4 - x - 2 &= -x && \rightarrow \text{Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc} \\ \Leftrightarrow 4x - x + x &= 2 + 4 && \rightarrow \text{Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang VT, các} \\ &&& \text{hằng số sang VP.} \\ \Leftrightarrow 3x &= 6 && \rightarrow \text{Thu gọn, ta nhận được phương trình dạng} \\ &&& ax = -b \\ \Leftrightarrow x &= 2 && \rightarrow \text{Sử dụng quy tắc chia để nhận được nghiệm} \\ &&& \text{của phương trình.} \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

**Thí dụ 2:** Giải phương trình:  $\frac{5x + 2}{6} - x = 1 - \frac{x + 2}{3}$ .

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} \frac{5x + 2 - 6x}{6} &= \frac{6 - 2(x + 2)}{6} && \rightarrow \text{Quy đồng mẫu số hai vế.} \\ \Leftrightarrow 2 - x &= 6 - 2x - 4 && \rightarrow \text{Nhân hai vế với 6 để khử mẫu.} \\ \Leftrightarrow -x + 2x &= 6 - 4 - 2 && \rightarrow \text{Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang VT, các} \\ &&& \text{hằng số sang VP.} \\ \Leftrightarrow x &= 0. && \rightarrow \text{Thu gọn.} \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 0$ .

**Nhân xét:** 1. Như vậy để giải những phương trình đưa được về dạng  $ax + b = 0$  hoặc  $ax = -b$ , ta thực hiện theo các bước:

*Bước 1:* Bằng việc sử dụng phép toán bỏ dấu ngoặc hay quy đồng mẫu ... để biến đổi phương trình ban đầu về dạng  $ax + b = 0$  hoặc  $ax = -b$ .

*Bước 2:* Giải phương trình nhận được, từ đó kết luận.

2. Tuy nhiên, trong một số trường hợp chúng ta cần linh

hoạt để nhận được những cách biến đổi đơn giản hơn, thí dụ:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{6} = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

3. Quá trình biến đổi phương trình có thể dẫn đến trường hợp đặc biệt là hệ số của ẩn bằng 0. Khi đó, phương trình có thể vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi  $x$ , thí dụ:

▪ Phương trình:

$$2x+1=2x-1 \Leftrightarrow 2x-2x=-1-1 \Leftrightarrow 0=-2$$

$\Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

▪ Phương trình:

$$x+2=x+2 \Leftrightarrow x-x=2-2 \Leftrightarrow 0=0$$

$\Rightarrow$  Phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải phương trình:  $\frac{5x-1}{10} + \frac{2x+3}{6} = \frac{x-8}{15} - \frac{x}{30}$ .

*Giải*

Phương trình tương đương với:  $3(5x-1) + 5(2x+3) = 2(x-8) - x$

$$\Leftrightarrow 15x - 3 + 10x + 15 = 2x - 16 - x \Leftrightarrow 15x + 10x - 2x + x = -16 + 3 - 15$$

$$\Leftrightarrow 24x = -28 \Leftrightarrow x = -\frac{28}{24} = -\frac{7}{6}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -\frac{7}{6}$ .

**Ví dụ 2:** Giải phương trình:  $\frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{4} = \frac{x-2}{5} + \frac{x-2}{6}$ .

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:  $\frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{4} - \frac{x-2}{5} - \frac{x-2}{6} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x=2$ .

**Nhận xét:**

Trong lời giải trên, ta không máy móc quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức, bởi xuất phát từ nhận xét về nhân tử chung  $x-2$ , điều này sẽ giúp giảm đáng kể độ phức tạp trong lời giải.

**Ví dụ 3:** Giải phương trình:  $(3x-4)(2x+1) - (6x+5)(x-3) = 3$ . (1)

*Giải*

Để tránh phải ghi lại nhiều lần, ta đi biến đổi riêng VT:

$$VT = 6x^2 + 3x - 8x - 4 - 6x^2 + 18x - 5x + 15 = 8x + 11.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:  $8x + 11 = 3 \Leftrightarrow 8x = -8 \Leftrightarrow x = -1$ .

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = -1$ .

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Trình bày các bước để giải phương trình đưa được về dạng  $ax + b$  hoặc  $ax = -b$ .

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải các phương trình:

a.  $4x + 1 = 6x - 13$ .

c.  $15 - 8x = 9 - 5x$ .

b.  $5 - 3x = 6x + 7$ .

d.  $9 - 2x = x + 1$ .

**Bài tập 2.** Giải các phương trình:

a.  $2(x - 2) + 3 = 1 - 2(x + 1)$ .

b.  $2(x - 3) + 1 = 2(x + 1) - 9$ .

c.  $3(x + 1)(x - 1) - 5 = 3x^2 + 2$ .

d.  $x^3 + 2(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x + 1) = x^3 + x - 4 - (x - 7)$ .

**Bài tập 3.** Giải các phương trình:

a.  $2x - \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{4} - \frac{1-2x}{8}$ .

b.  $\frac{x+4}{3} - 2x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{x+2}{3}$ .

c.  $\frac{2x+0,3}{2} - \frac{2x-1,5}{3} = \frac{2x-2,5}{12}$ .

d.  $\frac{x-3}{13} + \frac{x-3}{14} = \frac{x-3}{15} + \frac{x-3}{16}$ .

**Bài tập 4.** Giải các phương trình:

a.  $-\frac{x-1}{12} + \frac{x+3}{6} = 8 + \frac{2x+1}{15}$ .

b.  $x + \frac{x-1}{3} = 2 - \frac{2x+1}{2} + \frac{x+2}{5}$ .

c.  $\frac{3x+2}{12} - \frac{x}{4} = \frac{x+5}{6} - \frac{2x-3}{3}$ .

d.  $\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{4}(x-3) = 1 - \frac{1}{6}(3x+2)$ .

**Bài tập 5.** Giải các phương trình:

a.  $\frac{x-2}{7} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-4}{5} + \frac{x-3}{6}$ .

b.  $\frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{14} = \frac{x+3}{13} + \frac{x+4}{14}$ .

### V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a.  $x = 7$ .

b.  $x = -\frac{2}{9}$ .

c.  $x = 2$ .

d.  $x = \frac{8}{3}$ .

**Bài tập 2.**

a. Nhận mọi  $x$  làm nghiệm

b. Vô nghiệm.

c. Nhận mọi  $x$  làm nghiệm.

d.  $x = 1$ .

### Bài tập 3.

- a. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{2}(4x - 1) = \frac{1}{8}(6x + 1) \Leftrightarrow 4(4x - 1) = 6x + 1 \Leftrightarrow 10x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{1}{2}$ .

- b. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{3}(-5x + 7) = \frac{1}{6}(x - 4) \Leftrightarrow -10x + 14 = x - 4 \Leftrightarrow 11x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18}{11}$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{18}{11}$ .

c.  $x = -\frac{103}{20}$ .

- d. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x - 3)\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 3$ .

### Bài tập 4.

- a. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{12}(7 + x) = \frac{1}{15}(121 + 2x) \Leftrightarrow 3x = -449 \Leftrightarrow x = -\frac{449}{3}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = -\frac{449}{3}$ .

- b. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{3}(4x - 1) = \frac{1}{10}(19 - 8x) \Leftrightarrow 64x = 67 \Leftrightarrow x = \frac{67}{64}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{67}{64}$ .

- c. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}(3x - 11) \Leftrightarrow 10x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{10}{3}$ .

- d. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

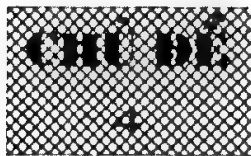
$$\frac{5}{4}(x - 1) = \frac{1}{6}(4 + 3x) \Leftrightarrow 21x = 23 \Leftrightarrow x = \frac{23}{21}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{23}{21}$ .

### Bài tập 5.

a.  $x = 9$ .

b.  $x = -\frac{419}{14}$ .



# PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta sử dụng kết quả:

$$A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases}$$

**Mở rộng:** Với phương trình:

$$A(x).B(x) \dots M(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ \dots \\ M(x) = 0 \end{cases}$$

Lấy các nghiệm của các phương trình trên, ta được nghiệm của phương trình ban đầu.

**Thí dụ 1:** Giải các phương trình sau:

a.  $(x - 1)(3 - 2x) = 0$ .

b.  $(5x - 3)(4x + 1)(x - 8)(x + 3) = 0$ .

**Giải**

a. Phương trình tương đương với:  $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 3 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là  $x = 1$ ,  $x = \frac{3}{2}$ .

b. Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 5x - 3 = 0 \\ 4x + 1 = 0 \\ x - 8 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ x = -\frac{1}{4} \\ x = 8 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm  $x = \frac{3}{5}$ ,  $x = -\frac{1}{4}$ ,  $x = 8$ ,  $x = -3$ .

**Chú ý:** Nhiều phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là một phương trình tích, khi đó chúng ta cần sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi phương trình về dạng tích.



**a 2:** Giải các phương trình sau:

a.  $2x(x + 1) = x^2 - 1$ .

b.  $3x^3 = x^2 + 3x - 1$ .

*Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1:* Biến đổi phương trình về dạng:  $2x(x + 1) = (x - 1)(x + 1)$

$$\Leftrightarrow 2x(x + 1) - (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x - x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -1$ .

*Cách 2:* Biến đổi phương trình về dạng:  $2x^2 + 2x - x^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -1$ .

b. Biến đổi phương trình về dạng:  $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(3x - 1) - (3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm phân biệt là  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = \frac{1}{3}$ .

**Nhân xét:** Như vậy, để giải những phương trình đưa được về dạng tích, ta thực hiện theo các bước:

*Bước 1:* Bằng việc xác định nhân tử chung (hoặc chuyển tất cả các hạng tử sang vế trái, lúc này vế phải bằng 0) ta đưa phương trình ban đầu về dạng tích.

*Bước 2* Giải phương trình rồi kết luận.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải phương trình:  $2x(x^2 + 2) = (x - 3)(x^2 + 2)$ . (1)

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1:* Biến đổi phương trình về dạng:  $2x(x^2 + 2) - (x - 3)(x^2 + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(2x - x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -3$ .

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:  $2x^3 + 4x = x^3 + 2x - 3x^2 - 6$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 4x - x^3 - 2x + 3x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2) + (2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -3$ .

Cách 3: Vì  $x^2 + 2 > 0$  nên chia cả hai vế của phương trình (1) cho

$$x^2 + 2 > 0, \text{ ta được: } 2x = x - 3 \Leftrightarrow 2x - x = -3 \Leftrightarrow x = -3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -3$ .

**Nhân xét:** Như vậy, để giải phương trình đã cho chúng ta đã chỉ ra được ba cách trình bày, cụ thể:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng tích bằng cách đặt nhân tử chung.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng tích bằng cách chuyển vế.

Cách 3: Sử dụng quy tắc chia cả hai vế của phương trình cho một số khác 0.

Và ở đó:

1. Cách 2 là quá cồng kềnh do việc chúng ta đã không đánh giá được sự có mặt của nhân tử chung ban đầu là  $x^2 + 2$ .
2. Cách 3 cho lời giải đơn giản hơn, tuy nhiên nếu "chia cả hai vế của phương trình cho một số chưa khẳng định được đã khác 0" sẽ dẫn tới hiện tượng mất nghiệm của phương trình. Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

**Ví dụ 2:** Giải phương trình:  $3x(2x - 3) = 7(2x - 3)$ . (1)

**Giải**

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3x(2x - 3) - 7(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(3x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ 3x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là  $x = \frac{3}{2}, x = \frac{7}{3}$ .

**Nhân xét:**

1. Nếu chia cả hai vế của phương trình (1) cho  $(2x - 3)$  thì ta sẽ bị mất một nghiệm  $x = \frac{3}{2}$ .

2. Có thể giải ví dụ trên bằng cách xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1:* Nếu  $x \neq \frac{3}{2}$  thì  $2x - 3 \neq 0$ .

Chia cả hai vế của (1) cho  $2x - 3 \neq 0$  được:

$$3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}, \text{ thoả mãn } x \neq \frac{3}{2}.$$

*Trường hợp 2:* Nếu  $x = \frac{3}{2}$  thì (1) được nghiệm đúng.

$$\text{Kết luận } S = \left\{ \frac{7}{3}, \frac{3}{2} \right\}$$

**Ví dụ 3:** Giải các phương trình sau:

a.  $(x^3 + x^2) + (x^2 + x) = 0$ .

b.  $x^3 + 1 - (x + 1)(x^2 - 2x + 3) = 0$ .

*Giải:*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1:* Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} x^2(x+1) + x(x+1) &= 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+x) = 0 \\ \Leftrightarrow x(x+1)(x+1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là  $x = -1, x = 0$ .

*Cách 2:* Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x^2 + x &= 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x = 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) &= 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là  $x = -1, x = 0$ .

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1:* Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2 - x + 1) - (x+1)(x^2 - 2x + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1 - x^2 + 2x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-2) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là  $x = -1, x = 2$ .

**Cách 2:** Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} x^3 + 1 - (x^3 - 2x^2 + 3x + x^2 - 2x + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - 3x - x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 - x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) - (x + 1) &= 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là  $x = -1$ ,  $x = 2$ .

**Nhân xét:** Trong lời giải trên, việc trình bày hai cách giải nhằm mục đích giúp các em học sinh có được phép so sánh, từ đó lựa chọn cho mình phương pháp thích hợp.

**Ví dụ 4:** Giải phương trình:  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .

**Giải**

Trước tiên ta đi phân tích đa thức  $x^2 - 2x - 3$  thành nhân tử, để thực hiện công việc này ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

**Cách 1:** (Sử dụng phép tách theo B): Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= x^2 + \underbrace{x - 3x}_{\text{tách } -2x = x - 3x} - 3 = (x^2 + x) - (3x + 3) \\ &= x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(x - 3). \end{aligned}$$

**Cách 2:** (Sử dụng phép tách theo A): Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= \underbrace{3x^2 - 2x^2}_{\text{tách } x^2 = 3x^2 - 2x^2} - 2x - 3 = (3x^2 - 3) - (2x^2 + 2x) \\ &= 3(x^2 - 1) - 2x(x + 1) = 3(x - 1)(x + 1) - 2x(x + 1) \\ &= (x + 1)[3(x - 1) - 2x] = (x + 1)(x - 3). \end{aligned}$$

**Cách 3:** (Sử dụng phép tách theo C): Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x + \underbrace{-2 - 1}_{\text{tách } -3 = -2 - 1} = (x^2 - 1) - (2x + 2) \\ &= (x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 2) \\ &= (x + 1)(x - 3). \end{aligned}$$

**Cách 4:** (Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức): Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + \underbrace{1 - 4}_{\text{tách } -3 = 1 - 4} = (x - 1)^2 - 4 \\ &= (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1). \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng:  $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$ .

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là  $x = 3, x = -1$ .

**Nhân xét:** Bốn cách phân tích đa thức dạng  $ax^2 + bx + c$  thành nhân tử trong lời giải trên đã được trình bày rất chi tiết trong cuốn Toán 8 tập 1 - *Đề nghị các em học sinh ôn lại*.

**Ví dụ 5:** Cho phương trình:  $(x + 1 - 3m)(3x - 5 + 2m) = 0$ .

- Tìm các giá trị của  $m$  sao cho một trong các nghiệm của phương trình là  $x = 1$ .
- Với mỗi  $m$  vừa tìm được ở câu a), hãy giải phương trình đã cho.

**Giải**

- Để phương trình nhận  $x = 1$  làm một nghiệm điều kiện là:

$$(1 + 1 - 3m)(3 \cdot 1 - 5 + 2m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - 3m)(-2 + 2m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3m = 0 \\ -2 + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy, với  $m = \frac{2}{3}$  hoặc  $m = 1$  thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Ta lần lượt thực hiện:

- Với  $m = \frac{2}{3}$ , phương trình có dạng:  $(x + 1 - 3 \cdot \frac{2}{3})(3x - 5 + 2 \cdot \frac{2}{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(3x - \frac{11}{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 3x - \frac{11}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{11}{9} \end{cases}$$

Vậy, với  $m = \frac{2}{3}$  phương trình có các nghiệm  $x = 1, x = \frac{11}{9}$ .

- Với  $m = 1$ , phương trình có dạng:  $(x + 1 - 3 \cdot 1)(3x - 5 + 2 \cdot 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(3x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy, với  $m = 1$  phương trình có các nghiệm  $x = 2, x = 1$ .

**Ví dụ 6:** Cho phương trình:  $2x^3 + ax + 3 = 0$ . (1)

- Biết rằng  $x = -1$  là một nghiệm của phương trình (1), hãy xác định  $a$ .
- Với  $a$  vừa tìm được ở câu a) hãy tìm các nghiệm còn lại của phương trình.

## Giải

- a. Vì  $x = -1$  là một nghiệm của phương trình (1) nên ta được:

$$2(-1)^3 + a(-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow -2 - a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy, với  $a = 1$  phương trình (1) có một nghiệm là  $x = -1$ .

- b. Với  $a = 1$ , phương trình (1) có dạng:  $2x^3 + x + 3 = 0$ . (2)

Để giải phương trình (2) ta cần phân tích đa thức  $2x^3 + x + 3$  thành nhân tử, để thực hiện công việc này chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1:* Thực hiện phép phân tích:

$$\begin{aligned} 2x^3 + x + 3 &= 2x^3 + 2 + x + 1 = 2(x^3 + 1) + (x + 1) \\ &= 2(x + 1)(x^2 - x + 1) + (x + 1) \\ &= (x + 1)(2x^2 - 2x + 2 + 1) = (x + 1)(2x^2 - 2x + 3). \end{aligned}$$

*Cách 2:* Vì  $x = -1$  là nghiệm của phương trình nên đa thức  $2x^3 + x + 3$  sẽ chia hết cho  $x + 1$  (thực hiện phép chia đa thức  $2x^3 + x + 3$  cho  $x + 1$  ra nháp), từ đó ta được:  $2x^3 + x + 3 = (x + 1)(2x^2 - 2x + 3)$ .

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x + 1)(2x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 2x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta được  $x = -1$ .

Giải (2), ta có nhận xét:  $2x^2 - 2x + 3 = 2(x^2 - x + 1) + 1 > 0$

$\Rightarrow$  phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -1$ .

**Nhận xét:** Trong lời giải trên, việc phân tích đa thức  $2x^3 + x + 3$  thành nhân tử được trình bày hai cách, ở đó:

*Cách 1:* Việc thực hiện là tương đối tự phát, nó được dựa trên kinh nghiệm trong việc phân tích đa thức thành nhân tử.

*Cách 2:* Chúng ta đã tận dụng được giả thiết cho  $x = -1$  là nghiệm của phương trình. Ta có kết quả tổng quát sau:

"Nếu phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm  $x = a$  thì đa thức  $f(x)$  chia hết cho  $x - a$ "

Tức là, khi đó:  $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$

và phương trình trở thành:  $(x - a)g(x) = 0$ .



**Ví dụ 7:** Giải phương trình:  $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ . Biết rằng phương trình có một nghiệm là  $x = 1$ .

**Giải**

Thực hiện phép chia đa thức  $2x^3 + x^2 - 5x + 2$  cho  $x - 1$ , ta được:

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 - 5x + 2 &= (x - 1)(2x^2 + 3x - 2) = (x - 1)(2x^2 + 4x - x - 2) \\ &= (x - 1)[2x(x + 2) - (x + 2)] = (x - 1)(2x - 1)(x + 2). \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng:  $(x - 1)(2x - 1)(x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt  $x = 1$ ,  $x = -2$ ,  $x = \frac{1}{2}$ .

**Nhận xét:** Như vậy với việc cho thêm giả thiết "Phương trình có một nghiệm là  $x = 1$ " đã giảm bớt được đáng kể độ khó của bài toán trong bước phân tích đa thức thành nhân tử. Điều này được hiểu là:

1. Với các em học sinh trung bình, bài toán được cho dưới dạng:

"Giải phương trình  $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$  biết rằng phương trình có một nghiệm là  $x = 1$ ".

2. Với các em học sinh khá, bài toán được cho dưới dạng:

"Giải phương trình  $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ ".

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Trình bày các bước để giải phương trình đưa được về dạng tích.

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải các phương trình:

a.  $(2x - 6)(3 + 4x) = 0$ .

b.  $(4x - 5)(5x + 6)(6x - 7) = 0$ .

c.  $(x - 3)(2x + 1)(2x - 3)(4x + 3) = 0$ .

d.  $(3x - 2)(2x + 5)(8x - 3)(4x + 1)(3x - 1) = 0$ .

**Bài tập 2.** Giải các phương trình:

a.  $(x - 6)(x + 1) = 2(x + 1)$ .

b.  $(x - 2)(5x + 3) = (3x - 8)(x - 2)$ .

c.  $2x(15x + 25) - 33(3x + 5) = 0$ .

d.  $(2x^2 + 1)(2x + 5) = (2x^2 + 1)(x - 1)$ .

**Bài tập 3.** Giải các phương trình:

a.  $x^2 - 9x + 20 = 0$ .

c.  $x^2 + 2x - 15 = 0$ .

b.  $x^3 - 4x^2 + 5x = 0$ .

d.  $(x^2 - 1)^2 = 4x + 1$ .

**Bài tập 4.** Giải phương trình:  $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$ . Biết rằng phương trình có một nghiệm là  $x = 1$ .

**Bài tập 5.** Giải phương trình:  $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$

Biết rằng phương trình có hai nghiệm là  $x = 1$  và  $x = -2$ .

**Bài tập 6.** Cho phương trình:  $(2x + 3m)(3x - 2m - 1) = 0$ .

a. Tìm các giá trị của  $m$  sao cho một trong các nghiệm của phương trình là  $x = 1$ .

b. Với mỗi  $m$  vừa tìm được ở câu a), hãy giải phương trình đã cho.

**Bài tập 7.** Cho biểu thức hai biến:  $f(x, y) = (x - 3y + 4)(2x + 3y - 1)$ .

a. Tìm các giá trị của  $y$  sao cho phương trình (ẩn  $x$ )  $f(x, y) = 0$  nhận  $x = 2$  làm nghiệm.

b. Tìm các giá trị của  $x$  sao cho phương trình (ẩn  $y$ )  $f(x, y) = 0$  nhận  $y = 1$  làm nghiệm.

**Bài tập 8.** Cho phương trình:  $x^3 + ax^2 + 11x - 6 = 0$ .

a. Biết rằng  $x = 1$  là một nghiệm của phương trình, hãy xác định  $a$ .

b. Với  $a$  vừa tìm được ở câu a) hãy tìm các nghiệm còn lại của phương trình.

**Bài tập 9.** \* Giải các phương trình:

a.  $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$ .

d.  $2x^3 - 9x + 2 = 0$ .

b.  $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = 0$ .

e.  $8x^3 - 4x^2 + 10x - 5 = 0$ .

c.  $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$ .

f.  $x^3 + x^2 - x\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$ .

**V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ**

**Bài tập 1.**

a.  $x = 3, x = -\frac{3}{4}$ .

b.  $x = \frac{5}{4}, x = -\frac{6}{5}, x = \frac{7}{6}$ .

c.  $x = 3, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}, x = -\frac{3}{4}$ .

d.  $x = \frac{2}{3}, x = -\frac{5}{2}, x = \frac{3}{8}, x = -\frac{1}{4}, x = \frac{1}{3}$ .

**Bài tập 2.**

a.  $x = 8, x = -1$ .

b.  $x = 2, x = -\frac{11}{2}$ .

$$c. x = -\frac{5}{3}, x = \frac{33}{10}.$$

$$d. x = -6.$$

### Bài tập 3.

a. Biến đổi:  $x^2 - 9x + 20 = x^2 - 4x - 5x + 20 = x(x - 4) - 5(x - 4) = (x - 4)(x - 5)$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x - 4)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 5 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x = 4, x = 5$ .

b. Biến đổi:  $x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5) = x[(x - 2)^2 + 1]$ .

Khi đó, phương trình có dạng:  $x[(x - 2)^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 0$ .

c. Biến đổi:  $x^2 + 2x - 15 = x^2 + 5x - 3x - 15 = x(x + 5) - 3(x + 5) = (x + 5)(x - 3)$

Khi đó, phương trình có dạng:  $(x + 5)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x = -5, x = 3$ .

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x^2 - 1)^2 = 4x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 4x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 4x + 2x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x[x(x^2 - 4) + 2(x - 2)] = 0 \Leftrightarrow x[x(x - 2)(x + 2) + 2(x - 2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2)(x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x = 0, x = 2$ .

**Bài tập 4.** Thực hiện phép chia đa thức  $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$  cho  $x - 1$ , ta được:

$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = (x - 1)(4x^2 - 5x + 1) = (x - 1)(4x^2 - 4x - x + 1)$$

$$= (x - 1)[4x(x - 1) - (x - 1)] = (x - 1)(x - 1)(4x - 1).$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x - 1)(x - 1)(4x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt  $x = 1, x = \frac{1}{4}$ .

**Bài tập 5.** Thực hiện phép chia đa thức  $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$  cho  $x - 1$ , rồi tiếp tục chia thương cho  $x + 2$ , ta được:

$$\begin{aligned}
 x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 &= (x - 1)(x + 2)(x^2 - 5x + 6) \\
 &= (x - 1)(x + 2)(x^2 - 3x - 2x + 6) = (x - 1)(x + 2)[x(x - 3) - 2(x - 3)] \\
 &= (x - 1)(x + 2)(x - 2)(x - 3)
 \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt  $x = 1, x = \pm 2, x = 3$ .

**Bài tập 6.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 7.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 8.**

a. Vì  $x = 1$  là một nghiệm của phương trình nên ta được:

$$1^3 + a \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

Vậy, với  $a = -1$  phương trình có một nghiệm là  $x = 1$ .

b. Với  $a = -1$ , phương trình có dạng:  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ .

Vì  $x = 1$  là nghiệm của phương trình nên đa thức  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  sẽ chia hết cho  $x - 1$  (thực hiện phép chia đa thức  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  cho  $x - 1$  ra nháp), từ đó ta được:  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$ .

Khi đó, phương trình có dạng:  $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt  $x = 1, x = 2, x = 3$ .

**Bài tập 9.**

a. Phân tích:  $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = (3x - 2)(x^2 - 2x - 2)$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(3x - 2)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 - 2x - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

▪ Giải (1), ta được  $x = \frac{2}{3}$ .

▪ Giải (2), ta biến đổi:  $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{3} \\ x - 1 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt  $x = 1, x = 1 \pm \sqrt{3}$ .

b. Phân tích:  $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = (x - 2)(x^2 - 2x + 3)$ .

Tới đây để nghị các em học sinh giải tiếp.

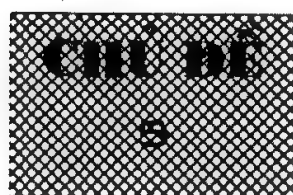
...

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 2$ .

c.  $x = -1, x = -2, x = -\frac{1}{2}$ .

d.  $x = 2, x = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

e.  $x = -\frac{1}{2}$ .



## PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc giải phương trình:  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x$ .

Ta sẽ trình bày theo hai cách để chỉ ra điều cần chú ý:

1. Với cách giải:  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x = 1$ .

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 1$ .

2. Với cách giải:  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x$

$\Leftrightarrow x + 1 = x \Leftrightarrow 1 = 0$ , mâu thuẫn.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

#### Nhận xét:

1. Lời giải thứ nhất, dễ thấy sai bởi khi  $x = 1$  thì  $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$  không xác định, do đó  $x = 1$  không thể là nghiệm của phương trình.

2. Lời giải thứ hai, cho kết quả đúng xong cách trình bày như vậy là còn thiếu sót.

Do đó, khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta cần chú ý đến một yếu tố đặc biệt, đó là *điều kiện xác định của phương trình*.

Tiếp theo, với việc giải phương trình:  $x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$ .

nếu các em học sinh bắt tay ngay vào việc biến đổi nó về dạng tích, tức là:

$$x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

rồi vội vàng kết luận " Phương trình có hai nghiệm  $x = 0, x = 1$  " thì các em đã mắc phải một sai lầm để nhận thấy rằng "  $x = 0$  không thể là nghiệm của phương trình ".

Do đó, thêm một lần nhắc nhở là " Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta cần chú ý đến một yếu tố đặc biệt, đó là điều kiện xác định của phương trình ".

## 2. TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Đối với các phương trình dạng:  $\frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \frac{A_2(x)}{B_2(x)} + \dots + \frac{A_n(x)}{B_n(x)} = 0$

điều kiện xác định của phương trình được cho bởi hệ: 
$$\begin{cases} B_1(x) \neq 0 \\ B_2(x) \neq 0 \\ \dots \\ B_n(x) \neq 0 \end{cases}$$

**Thí dụ 1:** Tìm điều kiện xác định cho mỗi phương trình sau:

a.  $\frac{x-1}{x-2} = 3.$

b.  $\frac{x}{x+1} = \frac{x-6}{x-4}.$

**Giải**

a. Điều kiện xác định của phương trình là:  $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$

b. Điều kiện xác định của phương trình là:  $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases}.$

**Chú ý:**

Trong những trường hợp hệ điều kiện phức tạp, chúng ta nên giải từng điều kiện một để giảm độ phức tạp, thí dụ sau sẽ minh họa trường hợp này.

**Thí dụ 2:** Tìm điều kiện xác định cho phương trình sau:

$$\frac{2x^2}{x^2-1} + \frac{2x-1}{x^2-5x+4} = 2.$$

**Giải**

Điều kiện xác định của phương trình là: 
$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 & (1) \\ x^2 - 5x + 4 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

- Giải (1), ta được:  $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$
- Giải (2):  $x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 4x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 4(x-1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}.$$

Vậy, điều kiện xác định của phương trình là:  $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 4 \end{cases}.$

### 3. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Tìm điều kiện xác định của phương trình.

*Bước 2:* Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

*Bước 3:* Giải phương trình vừa nhận được.

*Bước 4:* Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.

**Thí dụ 3:** Giải phương trình:  $\frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}.$

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là:  $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$

Biến đổi phương trình về dạng:  $\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$

$$\Leftrightarrow x(x+1) - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \text{ loại vì không thoả mãn điều kiện} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có một nghiệm  $x = 0$ .

**Chú ý:** Tuy nhiên, trong những trường hợp việc tìm ra được điều kiện một cách cụ thể là rất khó khăn, chúng ta sẽ lựa chọn theo hướng:

*Bước 1:* Tìm điều kiện xác định của phương trình (và không giải).

*Bước 2:* Giải phương trình.

*Bước 3:* Thử lại.

*Bước 4:* Kết luận về nghiệm cho phương trình.

**Thí dụ 4:** Giải phương trình:  $\frac{x^2-1}{x^6-5x+4} = 0.$

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là:  $x^6 - 5x + 4 \neq 0. \quad (*)$

Phương trình tương đương với:  $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

Kiểm tra điều kiện:

- Với  $x = 1$ , ta có:  $1^6 - 5.1 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$ , không thoả mãn điều kiện (\*).

- Với  $x = -1$ , ta có:  $1^6 - 5 \cdot (-1) + 4 = 1 + 5 + 4 = 10 \neq 0$ , thoả mãn (\*).  
Vậy, phương trình có một nghiệm  $x = \text{điều 1}$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải phương trình:  $\frac{x-5}{x-1} + \frac{2}{x-3} = 1$ .

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là:  $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ .

Biến đổi phương trình về dạng:  $\frac{(x-5)(x-3)}{(x-1)(x-3)} + \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-3) + 2(x-1) = (x-1)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 + 2x - 2 = x^2 - 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow -8x + 2x + 4x = 3 - 15 + 2 \Leftrightarrow -2x = -10 \Leftrightarrow x = 5, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, phương trình có một nghiệm  $x = 5$ .

**Ví dụ 2:** Giải phương trình:  $\frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x-5}{2x^2+10x} = \frac{x+25}{2x^2-50}$ .

*Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:  $\frac{x+5}{x(x-5)} - \frac{x-5}{2x(x+5)} = \frac{x+25}{2(x^2-25)}$ .

Điều kiện xác định của phương trình là:  $\begin{cases} x(x-5) \neq 0 \\ 2x(x+5) \neq 0 \\ 2(x^2-25) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 5 \end{cases}$ .

Biến đổi phương trình về dạng:  $2(x+5)^2 - (x-5)^2 = x(x+25)$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 20x + 50 - x^2 + 10x - 25 = x^2 + 25x$$

$$\Leftrightarrow 5x = -25 \Leftrightarrow x = -5, \text{ không thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 3:** Giải phương trình:  $\frac{x-8}{x-7} = \frac{1}{7-x} + 8$ .

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là:  $\begin{cases} x-7 \neq 0 \\ 7-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ x \neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 7$ .

Tới đây để thực hiện tiếp chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

**Cách 1:** Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu:

$$\frac{x-8}{x-7} = -\frac{1}{x-7} + 8 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x-7} = -\frac{1}{x-7} + \frac{8(x-7)}{x-7}$$

$$\Leftrightarrow x-8 = -1 + 8(x-7) \Leftrightarrow x-8 = -1 + 8x-56$$



$$\Leftrightarrow x - 8x = -1 - 56 + 8 \Leftrightarrow -7x = -49 \Leftrightarrow x = 7, \text{ không thoả mãn.}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Thực hiện phép quy đồng cục bộ:

$$\frac{x-8}{x-7} = \frac{1}{7-x} + 8 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x-7} + \frac{1}{x-7} = 8 \Leftrightarrow \frac{x-8+1}{x-7} = 8$$

$$\Leftrightarrow 1 = 8, \text{ mâu thuẫn. Vậy, phương trình vô nghiệm.}$$

**Nhân xét:** Cách 2 trong lời giải trên được trình bày để minh họa bước đầu cho hiệu quả của phép quy đồng cục bộ.

**Ví dụ 4:** Giải phương trình:  $x^2 + \frac{2x-1}{x-2} = 3x + \frac{3}{x-2}$ .

**Giải**

Điều kiện xác định của phương trình là:  $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ .

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 - 3x + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{3}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{2x-1-3}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{2x-4}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \text{ loại vì không thoả mãn điều kiện} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có một nghiệm  $x = 1$ .

**Nhân xét:** 1. Trong lời giải trên, chúng ta sử dụng phép quy đồng cục bộ để từ đó nhận được phương trình  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , và việc đưa phương trình này về dạng tích tương đối đơn giản.

2. Trong trường hợp chúng ta không sử dụng phương pháp quy đồng cục bộ thì sẽ nhận được:

$$x^2(x-2) + 2x - 1 = 3x(x-2) + 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 6x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

Để thấy, việc chuyển đổi phương trình này về dạng tích khó khăn hơn nhiều so với phương trình  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phương trình sau có nghiệm  $x = 1$  là đúng hay sai ?

$$x + \frac{2x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} + 1.$$

**Câu hỏi 2:** Nêu điều kiện xác định đối với phương trình dạng:

$$\frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \frac{A_2(x)}{B_2(x)} + \dots + \frac{A_n(x)}{B_n(x)} = 0.$$

**Câu hỏi 3:** Nêu các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu.

#### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải các phương trình:

a.  $x + \frac{2x-1}{1-x} = -1.$

b.  $x + \frac{1}{x} = 2.$

**Bài tập 2.** Giải các phương trình:

a.  $\frac{x}{x-2} = \frac{x-2}{x-3}.$

c.  $\frac{x+3}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x^2-2}{1-x^2} = 0.$

b.  $\frac{2x-4}{x-1} - \frac{x-3}{x-2} = 1.$

d.  $\frac{2x+1}{x-3} - \frac{3}{x-2} = 2.$

**Bài tập 3.** Giải các phương trình:

a.  $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

b.  $\frac{1}{x+2} - \frac{6}{x-1} + \frac{8}{(x+2)(x-1)} = 0$

c.  $\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{(x+3)(x-1)}$

d.  $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{x-3}{4-x^2}.$

**Bài tập 4.** Giải các phương trình:

a.  $\frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{3}{x^2-2x+1} = \frac{2}{1-x^2}.$

b.  $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}.$

**Bài tập 5.** Giải các phương trình:

a.  $\frac{x+1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)(x-3)}.$

b.  $\frac{2x-1}{x-1} + \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{6x-2}{x-2}.$

c.  $x + \frac{x}{x+2} + \frac{x+3}{x^2+5x+6} + \frac{x+4}{x^2+6x+8} = 1.$

**Bài tập 6.** Cho phương trình:  $\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 2.$

a. Giải phương trình với  $m = 2.$

b. Giải phương trình với  $m = 1.$

c. Giải phương trình với  $m = -2.$

d. Tìm  $m$  để phương trình nhận  $x = 2$  làm nghiệm.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

### Bài tập 1.

a.  $x = 0, x = 2.$

b.  $x = 1.$

### Bài tập 2.

a.  $x = 4.$

b.  $x = 3.$

c.  $x = -8.$

d.  $x = \frac{5}{4}.$

### Bài tập 3.

a.  $x = 0.$

b.  $x = -1.$

c.  $x = -3.$

d.  $x = -\frac{3}{5}.$

### Bài tập 4.

a.  $x = -\frac{1}{2}.$

b.  $x = \frac{3}{2}.$

### Bài tập 5.

a.  $x = 0.$

b.  $x = 0.$

c.  $x = 0.$

### Bài tập 6. Điều kiện có nghĩa cho phương trình là $x \neq \pm 1.$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned}(x - m)(x + 1) + (x - 2)(x - 1) &= 2(x - 1)(x + 1) \\ \Leftrightarrow (m + 2)x &= 4 - m.\end{aligned}\quad (1)$$

a. Với  $m = 2$ , phương trình (1) có dạng:  $4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

Vậy, với  $m = 2$  phương trình nhận  $x = \frac{1}{2}$  làm nghiệm.

b. Với  $m = 1$ , phương trình (1) có dạng:  $3x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy, với  $m = 1$  phương trình nhận  $x = 1$  làm nghiệm.

c. Với  $m = -2$ , phương trình (1) có dạng:  $0x = 6$ , mâu thuẫn.

Vậy, với  $m = -2$  phương trình vô nghiệm.

d. Để phương trình nhận  $x = 2$  làm nghiệm điều kiện là:

$$2(m + 2) = 4 - m \Leftrightarrow 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy, với  $m = 0$  thoả mãn điều kiện đầu bài.

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc giải phương trình:  $ax - 8 = 0 \Leftrightarrow ax = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{a}$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{8}{a}$

**Nhận xét:** Ta thấy ngay:

1. Với  $a = 1$  thì lời giải trên là đúng.

2. Với  $a = 0$  thì  $\frac{8}{a}$  không xác định do đó lời giải trên là sai.

Như vậy, khi giải phương trình có hệ số chữ, ta cần chú ý đến các trường hợp bằng 0 và khác 0 của hệ số của  $x$ , đó được gọi là "*Giải và biện luận phương trình theo tham số*". Để tiện theo dõi, trước khi trình bày bài toán tổng quát chúng ta đi giải và biện luận lại phương trình  $ax - 8 = 0$  như sau:

Biến đổi phương trình về dạng:  $ax = 8$  (\*)

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1:* Nếu  $a = 0$  thì (\*)  $\Leftrightarrow 0x = 8$ , mâu thuẫn  
 $\Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2:* Nếu  $a \neq 0$  thì (\*)  $\Leftrightarrow x = \frac{8}{a}$ ,

phương trình có nghiệm duy nhất.

### 2. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

**Bài toán:** Giải và biện luận phương trình :  $ax + b = 0$ .

#### PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Viết lại phương trình dưới dạng:  $ax = -b$  (1)

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1:* Nếu  $a = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 0 = -b \Leftrightarrow b = 0$ .

Vậy, ta được:

- Nếu  $b = 0$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .
- Nếu  $b \neq 0$ , phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2:* Nếu  $a \neq 0$ .

$$(1) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}, \text{ tức là phương trình có nghiệm duy nhất.}$$

Kết luận:

- Với  $a \neq 0$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -\frac{b}{a}$ .
- Với  $a = b = 0$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- Với  $a = 0$  và  $b \neq 0$ , phương trình vô nghiệm.

**Thí dụ 1:** Giải và biện luận phương trình:  $m^2x + 6 = 4x + 3m$ .

*Giải*

$$\text{Viết lại phương trình dưới dạng: } (m^2 - 4)x = 3m - 6. \quad (1)$$

*Trường hợp 1:* Nếu  $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ .

- Với  $m = 2$ , ta được:  $(1) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$ .  
Vậy, phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- Với  $m = -2$ , ta được:  $(1) \Leftrightarrow 0x = -12$ .  
Vậy, phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2:* Nếu  $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$  và  $m \neq -2$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{3}{m+2}.$$

Kết luận:

- Với  $m \neq \pm 2$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = \frac{3}{m+2}$ .
- Với  $m = 2$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- Với  $m = -2$ , phương trình vô nghiệm.

**Nhận xét:**

Trong thí dụ trên, ta thấy tồn tại đầy đủ các khả năng được minh họa trong bài toán tổng quát, tuy nhiên sẽ tồn tại những bài toán là một trường hợp đặc biệt:

- Hệ số  $a \neq 0$  với mọi giá trị của tham số, khi đó ta kết luận ngay tính duy nhất nghiệm của phương trình.
- Hệ số  $a = 0$  với mọi giá trị của tham số, khi đó ta biện luận cho  $b$ .

**Thí dụ 2:** Giải và biện luận phương trình:  $m^2x + 1 = m - x$ .

*Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:  $(m^2 + 1)x = m - 1$ . (1)

Ta có:  $m^2 + 1 \neq 0$ , với mọi  $m$ .

Do đó:  $(1) \Leftrightarrow x = \frac{m-1}{m^2+1}$ .

Vậy, phương trình luôn có nghiệm duy nhất  $x = \frac{m-1}{m^2+1}$ .

**Thí dụ 3:** Giải và biện luận phương trình:  $m(x+3) = m(x+4) + 6$ .

*Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$mx + 3m = mx + 4m + 6$$

$$\Leftrightarrow mx - mx = 4m - 3m + 6 \Leftrightarrow m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6.$$

Kết luận:

- Với  $m = -6$ , phương trình nhận mọi  $x$  làm nghiệm.
- Với  $m \neq -6$ , phương trình vô nghiệm.

**Chú ý:** Trong trường hợp bài toán có nhiều tham số chúng ta cần khéo léo biện luận theo các tham số đó để vét cạn được các trường hợp.

**Thí dụ 4:** Giải và biện luận phương trình:  $\frac{x+a}{b-a} + \frac{x-a}{b+a} = \frac{2}{a^2-b^2}$  (1)

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là:

$$\begin{cases} b-a \neq 0 \\ b+a \neq 0 \\ a^2-b^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm b.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-(a+b)(x+a) + (a-b)(x-a) = 2 \Leftrightarrow -bx = a^2 + 1.$$

Khi đó: • Với  $b = 0$ , phương trình vô nghiệm.

• Với  $b \neq 0$ , phương trình có nghiệm  $x = -\frac{a^2+1}{b}$ .

Kết luận: - Với  $b = 0$  hoặc  $a = \pm b$ , phương trình vô nghiệm.

- Với  $b \neq 0$  hoặc  $a \neq \pm b$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -\frac{a^2+1}{b}$ .

**Chú ý:** Thông thường, khi thực hiện bài toán trên các em học sinh hay mắc phải lỗi ngộ nhận rằng kết luận là:

- Với  $b = 0$ , phương trình vô nghiệm.
- Với  $b \neq 0$ , phương trình có nghiệm  $x = -\frac{a^2 + 1}{b}$ .

Hãy nhớ rằng, việc kết luận cần phải được kết hợp với điều kiện có nghĩa của phương trình.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Giải và biện luận phương trình:  $\frac{2x + a}{a - 2} - \frac{a - 2x}{a + 2} = \frac{6a}{a^2 - 4}$  (1)

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: 
$$\begin{cases} a - 2 \neq 0 \\ a + 2 \neq 0 \\ a^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm 2.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:  $(2x + a)(a + 2) - (a - 2x)(a - 2) = 6a$

$$\Leftrightarrow 2ax + 4x + a^2 + 2a - a^2 + 2a + 2ax - 4x = 6a$$

$$\Leftrightarrow 4ax + 4a = 6a \Leftrightarrow 4ax = 2a. \quad (2)$$

*Trường hợp 1:* Nếu  $a \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}.$$

*Trường hợp 2:* Nếu  $a = 0$ .

$$(2) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0, \text{ phương trình nghiệm đúng với mọi } x.$$

Kết luận: – Với  $a \neq 0$  và  $a \neq \pm 2$ , phương trình có một nghiệm  $x = \frac{1}{2}$ .

– Với  $a = 0$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .

– Với  $a = \pm 2$ , phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 2:** Giải và biện luận phương trình:  $a^2x = a(x + b) - b$ . (1)

*Giải*

$$\text{Viết lại phương trình dưới dạng: } a(a - 1)x = b(a - 1). \quad (2)$$

$$\text{Trường hợp 1: Nếu } a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Với  $a = 0$ , ta được:  $(2) \Leftrightarrow 0 \cdot x = -b$ .

- Với  $b = 0$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .
- Với  $b \neq 0$ , phương trình vô nghiệm.

Với  $a = 1$ , ta được:  $(2) \Leftrightarrow 0x = 0$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

*Trường hợp 2:* Nếu  $a(a - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ .

Khi đó:  $(2) \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$ : phương trình có nghiệm duy nhất.

- Kết luận:
- Với  $a = b = 0$  hoặc  $a = 1$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Với  $a = 0$  và  $b \neq 0$ , phương trình vô nghiệm.
  - Với  $a \neq 0$  và  $a \neq 1$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = \frac{b}{a}$ .

**Ví dụ 3:** Giải và biện luận phương trình:

$$(m - 2)x^2 - (2m - 1)x + m + 1 = 0. \quad (1)$$

*Giải.*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$[(m - 2)x - m - 1](x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (m - 2)x = m + 1 \end{cases} \quad (2)$$

Ta đi giải và biện luận (2).

*Trường hợp 1:* Nếu  $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ .

$(2) \Leftrightarrow 0x = 3$  mâu thuẫn  $\Rightarrow (2)$  vô nghiệm.

*Trường hợp 2:* Nếu  $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x = \frac{m + 1}{m - 2}$ .

Kết luận: – Với  $m = 2$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

– Với  $m \neq 2$ , phương trình có 2 nghiệm  $x = 1$  và  $x = \frac{m + 1}{m - 2}$ .

**Nhân xét:** Bằng việc biến đổi phương trình ban đầu về dạng tích ta đã biện luận được một phương trình bậc 2, tuy nhiên sau này ta có được một phương pháp tổng quát hơn để giải và biện luận một phương trình bậc hai bất kỳ.

**Ví dụ 4:** Giải và biện luận phương trình:  $\frac{mx - m - 3}{x + 1} = 1. \quad (1)$

*Giải.*

Điều kiện xác định của phương trình là:  $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ .

Biến đổi (1) về dạng:  $(m - 1)x = m + 4. \quad (2)$

*Trường hợp 1:* Nếu  $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ .

$(2) \Leftrightarrow 0 = 5$  mâu thuẫn  $\Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.



*Trường hợp 2:* Nếu  $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x = \frac{m+4}{m-1}$ .

Kiểm tra điều kiện:  $x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{m+4}{m-1} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$ .

Kết luận: – Với  $m = 1$  hoặc  $m = -\frac{3}{2}$ , phương trình vô nghiệm.

– Với  $m \neq 1$  hoặc  $m \neq -\frac{3}{2}$ , phương trình có nghiệm  $x = \frac{m+4}{m-1}$ .

**Ví dụ 5:** Giải và biện luận phương trình:  $\frac{a}{ax-1} + \frac{b}{bx-1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}$ . (1)

*Giải.*

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} ax-1 \neq 0 \\ bx-1 \neq 0 \\ (a+b)x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \neq 1 \\ bx \neq 1 \\ (a+b)x \neq 1 \end{cases} \quad (I)$$

Viết lại phương trình dưới dạng:  $abx[(a+b)x-2] = 0$ . (2)

*Trường hợp 1:* Nếu  $a = b = 0$ .

Điều kiện (I) luôn đúng, khi đó:

(2)  $\Leftrightarrow 0x = 0$ , phương trình nghiệm đúng với  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

*Trường hợp 2:* Nếu:  $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Điều kiện (I) trở thành  $x \neq \frac{1}{b}$ , khi đó:

(2)  $\Leftrightarrow 0x = 0$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x \neq \frac{1}{b}$ .

*Trường hợp 3:* Nếu:  $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Điều kiện (I) trở thành  $x \neq \frac{1}{a}$ , khi đó:

(2)  $\Leftrightarrow 0x = 0$ , phương trình nghiệm đúng với  $\forall x \neq \frac{1}{a}$ .

*Trường hợp 4:* Nếu:  $\begin{cases} a \neq 0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -a \neq 0$ .

Điều kiện (I) trở thành  $x \neq \frac{1}{a}$  và  $x \neq \frac{1}{b}$ .

Khi đó: (2)  $\Leftrightarrow x = 0$ , là nghiệm duy nhất của phương trình.

Trường hợp 5: Nếu:  $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a + b \neq 0 \end{cases}$

Điều kiện (I) trở thành  $x \neq \frac{1}{a}$  và  $x \neq \frac{1}{b}$  và  $x \neq \frac{1}{a+b}$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{a+b} \end{cases}$$

- Nghiệm  $x = \frac{2}{a+b}$  chỉ thoả mãn điều kiện khi  $a \neq b$ .

Kết luận:

- Với  $a = b = 0$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- Với  $a = 0$  và  $b \neq 0$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x \neq \frac{1}{b}$ .
- Với  $a \neq 0$  và  $b = 0$ , phương trình nghiệm đúng với mọi  $x \neq \frac{1}{a}$ .
- Với  $b = \pm a \neq 0$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 0$ .
- Với  $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0, a \neq b$ , phương trình có nghiệm  $x = 0$  và  $x = \frac{2}{a+b}$ .

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu lược đồ giải và biện luận phương trình:  $ax = 0$ .

**Câu hỏi 2:** Nêu lược đồ giải và biện luận phương trình:  $ax = 4$ .

**Câu hỏi 3:** Nêu lược đồ giải và biện luận phương trình:  $ax + b = 0$ .

**Câu hỏi 4:** Nêu lược đồ giải và biện luận phương trình:  $\frac{ax + b}{cx + d} = e$ , với  $c \neq 0$ .

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải và biện luận các phương trình:

a.  $m^2(x + 1) = x + m$ .

b.  $(m + 1)^2x - m = (2m + 5)x + 2$ .

**Bài tập 2.** Giải và biện luận các phương trình:

a.  $\frac{x}{2} - \frac{x-2}{a} = 0$ .

b.  $\frac{x-a}{a+2} + \frac{x-1}{a-2} = 0$ .

**Bài tập 3.** Giải và biện luận các phương trình:

a.  $\frac{x}{a-1} - \frac{2}{a+1} = \frac{4x}{a^2-1}$ .

b.  $\frac{ax-1}{a+1} - \frac{x+a}{1-a} = \frac{a^2+1}{a^2-1}$ .

**Bài tập 4.** Giải và biện luận các phương trình:

a.  $\frac{x+a}{b} = \frac{x}{a} + \frac{a}{b}$ .

b.  $\frac{x+a}{b} = 2 + \frac{x-b}{a}$ .

**Bài tập 5.** Giải và biện luận các phương trình:

a.  $a(ax + 2b^2) - a^2 = b^2(x + a)$ .

b.  $a(x - b) - 1 = b(1 - 2x)$ .

c.  $\frac{x+a}{b-a} + \frac{x-a}{b+a} = \frac{2}{a^2 - b^2}$ .

**Bài tập 6.** Giải và biện luận các phương trình:

a.  $\frac{ax-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$ .

b.  $\frac{a}{x-a} + \frac{1}{x+1} = \frac{a-1}{x-a} + \frac{a+1}{x+1}$ .

**Bài tập 7.** Xác định m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất

a.  $\frac{x-m}{x+1} = \frac{x-2}{x-1}$ .

b.  $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x-m}$ .

**Bài tập 8.** Xác định m để các phương trình sau có tập hợp nghiệm là  $\mathbf{R}$

a.  $m(m^2x - 1) = 1 - x$ .

b.  $m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$ .

**Bài tập 9.** Xác định m để các phương trình sau vô nghiệm:

a.  $(m-1)x = 4x + m + 1$ .

b.  $m^2(x-1) = 2(mx-2)$ .

c.  $\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 2$ .

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 5. c.** Điều kiện  $a \neq \pm b$ . Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-(a+b)(x+a) + (a-b)(x-a) = 2 \Leftrightarrow -bx = a^2 + 1$$

▪ Với  $b = 0$ , phương trình vô nghiệm.

▪ Với  $b \neq 0$ , phương trình có nghiệm  $x = -\frac{a^2+1}{b}$ .

**Bài tập 7. b.** Điều kiện  $x \neq 1$  và  $x \neq m$ .

Viết lại phương trình dưới dạng:  $mx = 2 - m$ . (2)

Do đó (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2-m}{m} \neq 1 \\ \frac{2-m}{m} \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m^2 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \notin \{-2, 0, 1\}.$$

Vậy với  $m \notin \{-2, 0, 1\}$  phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

**Bài tập 8.**

- a. Viết lại phương trình dưới dạng:  $(m^3 + 1)x = m + 1$ . (2)

$$\text{Do đó (1) có tập hợp nghiệm là } R \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 1 = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy với  $m = -1$  phương trình (1) có tập hợp nghiệm là **R**.

**Bài tập 9.**

- a. Điều kiện  $x \neq \pm 1$ .

$$\text{Viết lại phương trình dưới dạng: } (m + 2)x = 4 - m. \quad (2)$$

- b. Nếu  $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ .

$$(2) \Leftrightarrow 0x = 6 \text{ (MT)} \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

- c. Nếu  $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x = \frac{4 - m}{m + 2}$ .

$$\text{Do đó (1) vô nghiệm: } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4 - m}{m + 2} = 1 \\ \frac{4 - m}{m + 2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với  $m = -2$  hoặc  $m = 1$  phương trình (1) vô nghiệm.

**Nhận xét:** Trong lời giải trên chúng ta trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận, tuy nhiên cũng có thể trình bày dưới dạng:

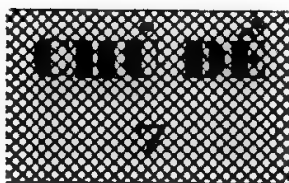
Điều kiện  $x \neq \pm 1$ .

$$\text{Viết lại phương trình dưới dạng: } (m + 2)x = 4 - m. \quad (2)$$

Phương trình (1) vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m + 2 = 0 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m + 2 \neq 0 \\ \frac{4 - m}{m + 2} = 1 \vee \frac{4 - m}{m + 2} = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$$

Tuy nhiên cách trình bày kiểu này có thể khiến một vài em học sinh thấy phức tạp. Do vậy nếu bài toán yêu cầu "Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm (hoặc vô nghiệm)" tốt nhất các em hãy trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận.



## GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình, ta thực hiện theo các bước sau:

**Bước 1:** Lập phương trình:

1. Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
2. Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
3. Lập phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng.

**Bước 2:** Giải phương trình.

**Bước 3:** Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

**Thí dụ 1:** Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng  $\frac{3}{4}$ . Tìm phân số ban đầu.

**Giải**

Gọi  $x$  là tử số của phân số phải tìm, điều kiện  $x$  là số nguyên. Vì:

- Phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11 nên mẫu số bằng  $x + 11$ , suy ra phân số có dạng:  $\frac{x}{x + 11}$ .

- Khi tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng  $\frac{3}{4}$  nên:  $\frac{x + 3}{(x + 11) - 4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x + 3}{x + 7} = \frac{3}{4} \stackrel{x \neq -7}{\Leftrightarrow} 4(x + 3) = 3(x + 7)$

$$\Leftrightarrow 4x - 3x = 21 - 12 \Leftrightarrow x = 9, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, phân số cần tìm bằng  $\frac{9}{20}$ .

- Nhân xét:**
1. Bài toán trên yêu cầu tìm ra phân số, xong thực chất là đi tìm tử số (hoặc mẫu số) của phân số đó, do đó chúng ta thiết lập ẩn số  $x$  cho tử số.
  2. Nếu bài toán yêu cầu tìm hai hay nhiều giá trị thì chúng ta cần lựa chọn ẩn để gán cho *giá trị thuận lợi nhất* (tuy nhiên trong nhiều trường hợp chúng có vai trò như nhau).

**Thí dụ 2:** (Bài toán cô): Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó, biết:

Vừa gà vừa chó  
Bó lại cho tròn  
Ba mươi sáu con  
Một trăm chân chẵn.

## Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

**Cách 1:** Ta lần lượt thực hiện:

Gọi  $x$  là số gà, điều kiện  $x$  là số nguyên dương nhỏ hơn 36. Vì:

- Tổng số gà và chó là "Ba mươi sáu con" nên số chó bằng  $36 - x$ .
- Tổng số chân của gà và của chó là "Một trăm chân chẵn" nên:

$$2x + 4(36 - x) = 100 \Leftrightarrow 2x + 144 - 4x = 100$$

$$\Leftrightarrow -2x = 100 - 144 \Leftrightarrow x = 22, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, số gà bằng 22 con và số chó bằng  $36 - 22 = 14$  con.

**Cách 2:** Ta lần lượt thực hiện:

Gọi  $x$  là số chó, điều kiện  $x$  là số nguyên dương nhỏ hơn 36. Vì:

- Tổng số gà và chó là "Ba mươi sáu con" nên số gà bằng  $36 - x$ .
- Tổng số chân của gà và của chó là "Một trăm chân chẵn" nên:

$$4x + 2(36 - x) = 100 \Leftrightarrow 4x + 72 - 2x = 100$$

$$\Leftrightarrow 2x = 100 - 72 \Leftrightarrow x = 14, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, số chó bằng 14 con và số gà bằng  $36 - 14 = 22$  con.

**Nhân xét:** Trong hai cách giải của bài toán trên, chúng ta đã tuân thủ đủ 3 bước cần thực hiện khi giải bài toán bằng cách lập phương trình, cụ thể:

1. Bài toán yêu cầu tìm số gà và số chó, do vậy có thể lựa chọn số gà hoặc số chó là ẩn:
  - Trong cách 1 ta chọn  $x$  là số gà và thiết lập điều kiện  $x \in \mathbb{N}^*$  và  $x < 36$ .
  - Tiếp đó, ta diễn đạt đại lượng chưa biết là số chó bằng  $36 - x$ .
  - Cuối cùng, ta thiết lập được phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng (là  $x$  và  $36 - x$ ) thông qua giả thiết tổng số chân bằng 100.
2. Giải phương trình nhận được trong bước 1, ta được  $x = 22$ .
3. Vì giá trị  $x = 22$  thoả mãn điều kiện được thiết lập trong bước 1, từ đó ta suy ra số chó và kết luận nghiệm cho bài toán.

**Thí dụ 3:** Hiệu hai số bằng 8, số này gấp đôi số kia. Tìm hai số đó.

*Giải*

Gọi  $x$  là số thứ nhất trong hai số đã cho.

Vì:

- Số thứ hai gấp đôi lần số thứ nhất nên nó bằng  $2x$ .
- Hiệu hai số bằng 8 nên:  $x - 2x = 8$  (1)  
hoặc  $2x - x = 8$ . (2)

Giải (1), ta được  $x = -8$ , khi đó số còn lại bằng  $-16$ .

Giải (2), ta được  $x = 8$ , khi đó số còn lại bằng  $16$ .

Vậy, có hai cặp số thoả mãn điều kiện đầu bài là  $-8$  và  $-16$  hoặc  $8$  và  $16$ .

**Nhận xét:** Thí dụ trên cho thấy, có thể có 1 hoặc nhiều phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng - Điều này nhắc nhở các em học sinh cần có được cái nhìn tổng quan để chỉ ra được đầy đủ các trường hợp.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Tổng hai số bằng 72, hiệu của chúng bằng 6. Tìm hai số đó.

*Giải*

Gọi  $x$  là số lớn trong hai số đã cho, điều kiện  $6 \leq x \leq 72$ . Vì:

- Tổng hai số bằng 72 nên số nhỏ bằng  $72 - x$ .
- Hiệu hai số bằng 6 nên:  $x - (72 - x) = 6 \Leftrightarrow 2x - 72 = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 + 72$   
 $\Leftrightarrow 2x = 78 \Leftrightarrow x = 39$ , thoả mãn điều kiện.

Vậy, số lớn bằng 39 và số nhỏ bằng  $72 - 39 = 33$ .

**Chú ý:** Trong lời giải bài toán trên, nếu chúng ta không phân biệt số lớn và số nhỏ thì cần phải lập hai phương trình dạng:

$$x - (72 - x) = 6 \text{ hoặc } (72 - x) - x = 6.$$

**Ví dụ 2:** Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5. Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68. Tìm số đó.

*Giải*

Gọi  $x$  là chữ số hàng chục của số phải tìm, điều kiện  $x$  là số nguyên và

$0 < x \leq 9$ . Vì:

- Số cần tìm là số lẻ và chia hết cho 5 nên chữ số hàng đơn vị của nó phải bằng 5, suy ra số cần tìm có dạng:  $\overline{x5} = 10x + 5$ .
- Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68 nên:

$$(10x + 5) - x = 68 \Leftrightarrow 9x = 63 \Leftrightarrow x = 7, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, số cần tìm bằng 75.

**Ví dụ 3:** (Bài toán cổ Hi Lạp):

- Thừa Py-ta-go lỗi lạc, trường của người có bao nhiêu môn đệ ?

Nhà hiền triết trả lời:

- Hiện nay, một nửa đang học Toán, một phần tư đang học nhạc, một phần bảy ngồi yên suy nghĩ. Ngoài ra còn có ba phụ nữ.

Hỏi trường Đại học của Py – ta – go có bao nhiêu người ?

*Giải*

Gọi  $x$  là số người trong trường Đại học của Py – ta – go, điều kiện  $x \in \mathbb{N}^+$ . Vì:

- Một nửa đang học Toán, tức là có  $\frac{x}{2}$ .
- Một phần tư đang học Nhạc, tức là có  $\frac{x}{4}$ .
- Một phần bảy ngồi yên suy nghĩ, tức là có  $\frac{x}{7}$ .
- Tổng số những người học Toán, Nhạc, ngồi yên suy nghĩ và ba phụ nữ bằng số môn đệ của trường nên:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x \Leftrightarrow 14x + 7x + 4x + 3 \cdot 28 = 28x$$

$$\Leftrightarrow 25x + 84 = 28x \Leftrightarrow 3x = 84 \Leftrightarrow x = 28, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, trường Đại học của Py – ta – go có 28 người.

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình.

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho phân số  $\frac{23}{201}$ . Tìm một số sao cho nếu lấy tử cộng với số đó, lấy

mẫu trừ đi số đó thì phân số mới có giá trị bằng  $\frac{3}{5}$ .

**Bài tập 2.** Tổng hai số bằng 90, hiệu của chúng bằng 72. Tìm hai số đó.

**Bài tập 3.** Tổng hai số bằng 33, số này gấp đôi số kia. Tìm hai số đó.

**Bài tập 4.** Hiệu hai số bằng 9, số này gấp đôi số kia. Tìm hai số đó.

**Bài tập 5.** Hiệu hai số bằng 4, tỉ số giữa chúng bằng  $\frac{3}{2}$ . Tìm hai số đó.



**Bài tập 6.** Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 5 đơn vị thì được một phân số bằng  $\frac{2}{3}$ . Tìm phân số ban đầu.

**Bài tập 7.** Có hai ngăn sách, trong đó số sách ở ngăn I gấp ba số sách ở ngăn II. Sau khi chuyển 20 cuốn sách từ ngăn I sang ngăn II thì số sách ở ngăn II bằng  $\frac{5}{7}$  số sách ở ngăn I. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

**Bài tập 8.** Ba khối học sinh 6, 7, 8 đi tham quan. Số học sinh khối 6 bằng  $\frac{2}{5}$  tổng số. Số học sinh khối 7 bằng  $\frac{3}{4}$  số học sinh khối 6. Số học sinh khối 8 là 135 người. Tính tổng số học sinh đi tham quan.

**Bài tập 9.** Mẹ 37 tuổi, con 7 tuổi. Sau mấy năm nữa thì tuổi mẹ gấp ba tuổi con ?

**Bài tập 10.** Tìm một số tự nhiên biết rằng nếu viết thêm một chữ số 4 vào cuối của số đó thì số ấy tăng thêm 1219 đơn vị.

**Bài tập 11.** Hai lớp 8A và 8B có tổng cộng 94 học sinh. Biết rằng 25% số học sinh 8A đạt loại giỏi, 20% số học sinh 8B đạt loại giỏi và tổng số học sinh giỏi của hai lớp là 21 học sinh. Tính số học sinh của mỗi lớp.

**Bài tập 12.** Hai người cùng khởi hành một lúc từ A để đến B, đường dài 60km. Vận tốc người thứ nhất là 12km/h, vận tốc người thứ hai là 15km/h. Hỏi sau lúc khởi hành bao lâu thì người thứ nhất cách B một quãng đường gấp đôi khoảng cách từ người thứ hai đến B ?

**Bài tập 13.** Một người đi từ A đến B, vận tốc 30km/h. Lúc từ B về A, người đó đi với vận tốc 40km/h, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 45 phút. Tính quãng đường AB.

**Bài tập 14.** Đường sông từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ 10km. Để đi từ A đến B, một ca nô đi hết 3 giờ 20 phút, một ô tô đi hết 2 giờ. Biết vận tốc của ca nô kém vận tốc của ô tô là 17km/h, tính vận tốc của ca nô.

**Bài tập 15.** Một ca nô tuần tra đi xuôi từ A đến B hết 1 giờ 20 phút và ngược dòng từ B về A hết 2 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô.

**Bài tập 16.** Hai người cùng đi một lúc từ A đến B, đường dài 120km. Người thứ nhất đi với vận tốc không đổi trên cả quãng đường. Người thứ hai đi trên nửa đầu của quãng đường với vận tốc lớn hơn vận tốc của người thứ nhất là 10km/h, đi trên nửa sau của quãng đường với vận tốc kém vận tốc người thứ nhất là 6km/h. Biết rằng hai người đến B cùng một lúc, tính vận tốc của người thứ nhất.

**Bài tập 17.** Người ta pha 3 kg nước nóng ở nhiệt độ  $90^{\circ}\text{C}$  với 2 kg nước lạnh ở nhiệt độ  $20^{\circ}$ . Hỏi nhiệt độ nước sau khi pha là bao nhiêu ?

**Bài tập 18.** Cho 200 gam dung dịch có nồng độ muối là 10%. Phải pha thêm vào dung dịch đó bao nhiêu gam nước để dung dịch lúc sau có nồng độ muối là 8% ?

**Bài tập 19.** 200g dung dịch chứa 50g muối. Cần pha thêm bao nhiêu gam nước để được một dung dịch chứa 10% muối ?

**Bài tập 20.** Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2%, còn tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân hai tỉnh năm nay là 4045000 người. Tính số dân mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** Gọi  $x$  là số cần tìm.

$$\text{Khi đó, ta có: } \frac{23 + x}{201 - x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5(23 + x) = 3(201 - x) \Leftrightarrow 8x = 488 \Leftrightarrow x = 61.$$

Vậy, số cần tìm bằng 81.

**Bài tập 2.** Gọi số lớn là  $x$ . Từ giả thiết:

- Tổng hai số bằng 90, suy ra số nhỏ là  $90 - x$ .

- Hiệu của chúng bằng 72, suy ra:

$$x - (90 - x) = 72 \Leftrightarrow x - 90 + x = 72 \Leftrightarrow 2x = 162 \Leftrightarrow x = 81.$$

Vậy, hai số cần tìm là 81 và 9.

**Bài tập 3.** Gọi số lớn là  $x$ . Từ giả thiết:

- Tổng hai số bằng 33, suy ra số nhỏ là  $33 - x$ .

- Số này gấp đôi số kia, suy ra:  $x = 2(33 - x) \Leftrightarrow x = 66 - 2x \Leftrightarrow 3x = 66 \Leftrightarrow x = 22$ .

Vậy, hai số cần tìm là 22 và 11.

**Bài tập 4.** Gọi số lớn là  $x$ . Từ giả thiết:

- Hiệu hai số bằng 9, suy ra số nhỏ là  $x - 9$ .

- Số này gấp đôi số kia, suy ra:  $x = 2(x - 9) \Leftrightarrow x = 2x - 18 \Leftrightarrow x = 18$ .

Vậy, hai số cần tìm là 18 và 9.

**Bài tập 5.** Gọi số lớn là  $x$ . Từ giả thiết:

- Hiệu hai số bằng 4, suy ra số nhỏ là  $x - 4$ .

- Tỉ số giữa chúng bằng  $\frac{3}{2}$ , suy ra:  $\frac{x}{x - 4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x = 3(x - 4)$

$$\Leftrightarrow 2x = 3x - 12 \Leftrightarrow x = 12.$$

Vậy, hai số cần tìm là 12 và 8.

**Bài tập 6.** Gọi tử số là  $x$ . Từ giả thiết:

- Tử số bé hơn mẫu số là 11, suy ra mẫu số là  $x + 11$ .

Và khi đó phân số có dạng  $\frac{x}{x+11}$

- Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 5 đơn vị thì được một phân số

bằng  $\frac{2}{3}$ , suy ra:  $\frac{x+3}{(x+11)-5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(x+3) = 2(x+6)$

$$\Leftrightarrow 3x + 9 = 2x + 12 \Leftrightarrow x = 3. \text{ Vậy, phân số cần tìm là } \frac{3}{14}.$$

**Bài tập 7.** Gọi số sách trong ngăn thứ II là  $x$ . Từ giả thiết:

- Số sách ở ngăn I gấp ba số sách ở ngăn II, suy ra nó có  $3x$  cuốn.
- Sau khi chuyển 20 cuốn sách từ ngăn I sang ngăn II thì

Số sách ở ngăn I còn  $3x - 20$  cuốn

Số sách ở ngăn II là  $x + 20$  cuốn

Khi đó, ta có:  $x + 20 = \frac{5}{7}(3x - 20) \Leftrightarrow 7x + 140 = 15x - 100 \Leftrightarrow 8x = 240 \Leftrightarrow x = 30.$

Vậy, số sách ở ngăn thứ I bằng 90 cuốn và số sách ở ngăn thứ II bằng 30 cuốn.

**Bài tập 8.** Gọi  $x$  là tổng số học sinh đi tham quan. Từ giả thiết:

- Số học sinh khối 6 bằng  $\frac{2}{5}x = \frac{2x}{5}$ .
- Số học sinh khối 7 bằng  $\frac{3}{4} \cdot \frac{2x}{5} = \frac{3x}{10}$ .

Khi đó, ta có:  $\frac{2x}{5} + \frac{3x}{10} + 135 = x \Leftrightarrow 4x + 3x + 1350 = 10x$

$$\Leftrightarrow 3x = 1350 \Leftrightarrow x = 450 \text{ người.}$$

Vậy, tổng số học sinh đi tham quan là 450 người.

**Bài tập 9.** Gọi  $x$  là số năm cần thiết. Sau  $x$  năm thì:

- Tuổi của mẹ bằng  $37 + x$ .
- Tuổi của con bằng  $7 + x$ .

Khi đó, ta có:  $37 + x = 3(7 + x) \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy, sau 8 năm thì tuổi mẹ gấp ba tuổi con.

**Bài tập 10.** Gọi  $x$  là số cần tìm. Từ giả thiết:

- Khi viết thêm một chữ số 4 vào cuối của số đó, ta được số mới có giá trị bằng  $10x + 4$ .

Khi đó, ta có:  $10x + 4 = x + 1219 \Leftrightarrow 9x = 1215 \Leftrightarrow x = 135$ .

Vậy, số cần tìm là 135.

**Bài tập 11.** Gọi  $x$  là số học sinh lớp 8A. Từ giả thiết:

- Hai lớp 8A và 8B có tổng cộng 94 học sinh, suy ra lớp 8B có  $94 - x$  học sinh.
- 25% số học sinh 8A đạt loại giỏi bằng  $\frac{25x}{100} = \frac{x}{4}$  học sinh.
- 20% số học sinh 8B đạt loại giỏi bằng  $\frac{20(94 - x)}{100} = \frac{94 - x}{5}$  học sinh.

Khi đó, ta có:  $\frac{x}{4} + \frac{94 - x}{5} = 21 \Leftrightarrow 5x + 4(94 - x) = 420 \Leftrightarrow x = 44$ .

Vậy, lớp 8A có 44 học sinh và lớp 8B có 50 học sinh.

**Bài tập 12.** Gọi  $x$  giờ là số thời gian cần thiết. Sau  $x$  giờ, ta có:

- Người thứ nhất đi được một quãng đường là  $12x$ , khi đó sẽ còn cách B một đoạn bằng  $60 - 12x$ .
- Người thứ hai đi được một quãng đường là  $15x$ , khi đó sẽ còn cách B một đoạn bằng  $60 - 15x$ .

Khi đó, ta có:  $60 - 12x = 2(60 - 15x) \Leftrightarrow 18x = 60 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} = 3^h 20'$ .

Vậy, sau  $3^h 20'$  thì người thứ nhất cách B một quãng đường gấp đôi khoảng cách từ người thứ hai đến B

**Bài tập 13.** Gọi  $x$  là độ dài quãng đường AB. Từ giả thiết:

- Người đó đi từ A đến B hết  $\frac{x}{30}$  giờ.
- Người đó đi từ B về A hết  $\frac{x}{40}$  giờ.

Khi đó, ta có:  $\frac{x}{30} - \frac{x}{40} = \frac{45}{60} \Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 4x - 3x = 90 \Leftrightarrow x = 90$ .

Vậy, quãng đường AB dài 90km.

**Bài tập 14.** Gọi vận tốc của canô là  $x$  km/h. Từ giả thiết:

- Độ dài đường sông từ A đến B bằng  $x \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{10x}{3}$ .
- Vận tốc ô tô bằng  $x + 17$ .
- Độ dài đường bộ từ A đến B bằng  $2(x + 17)$ .

Khi đó, ta có:  $2(x + 17) - \frac{10x}{3} = 2 \Leftrightarrow 6(x + 17) - 10x = 6 \Leftrightarrow 4x = 96 \Leftrightarrow x = 24$

Vậy, vận tốc của canô là 24km/h.

**Bài tập 15.** Gọi vận tốc riêng của canô là  $x$  km/h. Từ giả thiết:

- Vận tốc khi đi của canô khi đi xuôi dòng bằng  $x + 3$ .
- Vận tốc khi đi của canô khi đi ngược dòng bằng  $x - 3$ .

Khi đó, ta có:  $\frac{4}{3}(x + 3) = 2(x - 3) \Leftrightarrow 4(x + 3) = 6(x - 3) \Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow x = 15$ .

Vậy, vận tốc riêng của canô là 15km/h.

**Bài tập 16.** Gọi vận tốc của người thứ nhất là  $x$  km/h. Từ giả thiết:

- Thời gian để đi từ A đến B của người thứ nhất bằng  $\frac{120}{x}$ .
- Trên nửa đầu của quãng đường người thứ hai đi với vận tốc  $x + 10$ , do đó thời gian đi bằng  $\frac{60}{x + 10}$ .
- Trên nửa sau của quãng đường người thứ hai đi với vận tốc  $x - 6$ , do đó thời gian đi bằng  $\frac{60}{x - 6}$ .

Khi đó, ta có:  $\frac{60}{x + 10} + \frac{60}{x - 6} = \frac{120}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x + 10} + \frac{1}{x - 6} = \frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow x(x - 6) + x(x + 10) = 2(x + 10)(x - 6)$

$\Leftrightarrow 4x = 8x - 120 \Leftrightarrow 4x = 120 \Leftrightarrow x = 30$ .

Vậy, người thứ nhất đi với vận tốc 30km/h.

## ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

**Bài tập 1.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{5}{3m+2}$  và  $B = \frac{4}{3m-1}$

Hãy tìm giá trị của  $m$  để hai biểu thức ấy có giá trị thỏa mãn hệ thức:

a.  $2A + 3B = 0$

b.  $AB = A + B$ .

**Bài tập 2.** Tính gần đúng nghiệm của các phương trình sau, làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.

a.  $(\sqrt{12}x + \sqrt{15})(\sqrt{5} - 2\sqrt{3}x) = 0$ .      b.  $(\sqrt{2,3}x + \sqrt{5,7})(\sqrt{3} - 2,7x) = 0$ .

**Bài tập 3.** Giải các phương trình sau:

a.  $\frac{3x-0,6}{5} - \frac{7x-1,5}{6} = \frac{9x+3}{7} + \frac{5-4x}{8}$ .

b.  $\frac{2x+1}{x-5} - \frac{5x-6}{3x+1} = 2 - \frac{5}{(x-5)(3x+1)}$ .

c.  $\frac{4}{5(x-3)} + \frac{16}{18-2x^2} = -\frac{5}{7(x+5)}$ .

d.  $\frac{7x^2}{2(2x^2-8)} = \frac{3x}{2-x} - \frac{8x+1}{x+2}$ .

**Bài tập 4.** Cho phương trình (ẩn  $x$ ):  $4x^2 - 9 + k^2 - 12kx = 0$

a. Giải phương trình với  $k = 0$ .

b. Giải phương trình với  $k = -5$ .

c. Tìm các giá trị của  $k$  sao cho phương trình nhận giá trị  $x = 2$  làm nghiệm.

**Bài tập 5.** Giải các phương trình sau:

a.  $(x+3)(x^3 - 4x^2 + 5x - 15) = (x+3)(x^3 - 4x^2 + 1)$ .

b.  $\frac{-9x^2+5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1} - \frac{5}{x-1}$

c.  $3x^2 + x = 2 - 7x$ .

d.  $\frac{x-4}{x+3} - \frac{5}{x-3} = \frac{3(x-9)}{x^2-9}$

**Bài tập 6.** Giải các phương trình sau:

a.  $x - 39 = \frac{4}{5}x - \frac{2-3x}{5}$ .

b.  $\frac{x+1}{2002} + \frac{x-1}{2003} = \frac{x+2}{2001} + \frac{x-2}{2004}$

**Bài tập 7.** Giải các phương trình:

a.  $(x+1)^2 + (2-3x)(x+1) = 0$ .

b.  $x^2 - 4x + 4 = (2x-3)(x-2)$ .

c.  $(x-1)^2 = 4$ .

d.  $(2x+1)^2 = (x-1)^2$ .

e.  $x^2 + (x+1)(13-8) = 1$ .

f.  $x^3 - (x^2 + x + 1)(2x-1) = 1$ .

**Bài tập 8.** Giải các phương trình:

a.  $3x^2 = 2x - 6$ .

b.  $2x^3 + x^2 + 6x + 3 = 0$ .

c.  $x^3 - 9x = -6x^2$ .

d.  $(2x + 5)(2x - 5) = 17$ .

**Bài tập 9.** Giải các phương trình sau:

a.  $\frac{1-3x}{x-5} + \frac{2x-1}{2-x} = \frac{4}{x^2-7x+10}$ .

b.  $\frac{3}{2x-1} - \frac{5}{x+3} = \frac{9}{2x^2+5x-3}$ .

**Bài tập 10.** Giải các phương trình sau:

a.  $\frac{x}{x-5} + \frac{-1}{25-x^2} = \frac{8}{x+5}$ .

b.  $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2} = 5$

**Bài tập 11.** Giải phương trình:  $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$ . Biết rằng phương trình có một nghiệm là  $x = 1$ .

**Bài tập 12.** Giải phương trình:  $x^4 - 6x^3 - x^2 + 54x - 72 = 0$ . Biết rằng phương trình có một nghiệm là  $x = 2$ .

**Bài tập 13.** \* Giải các phương trình:

a.  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ .

b.  $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$ .

c.  $2x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 3x - 2 = 0$ .

d.  $x^4 - 3x^2 - 4x - 3 = 0$ .

e.  $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ .

f.  $x^4 + 2x^3 + 10x - 25 = 0$ .

**Bài tập 14.** Hai người cùng đi một lúc từ A đến B, đường dài 120km. Người thứ nhất đi vận tốc không đổi trên cả quãng đường. Người thứ hai đi trên nửa đầu của quãng đường với vận tốc lớn hơn vận tốc của người thứ nhất là 10km/h, đi trên nửa sau của quãng đường với vận tốc kém vận tốc người thứ nhất là 6km/h. Biết rằng hai người đến B cùng một lúc, tính vận tốc của người thứ nhất.

**Bài tập 15.** Số nhà của An là một số tự nhiên có hai chữ số. Nếu thêm chữ số 8 vào bên trái số đó thì được một số kí hiệu là A. Nếu thêm chữ số 8 vào bên phải số đó thì được một số kí hiệu là B. Tìm số nhà của An, biết rằng:  $A - B = 475$ .

**Bài tập 16.** Bình thường, bạn Lan đi học từ nhà đến trường với vận tốc 5km/h thì vừa đúng giờ vào lớp. Nhưng hôm nay, do dậy hơi muộn so với bình thường 24 phút nên bạn Lan phải chạy với vận tốc 7,5km/h và đã đến trường đúng giờ. Hỏi quãng đường từ nhà bạn Lan đến trường ?

**Bài tập 17.** Một đội thợ mỏ lập kế hoạch khai thác than, theo đó mỗi ngày phải khai thác được 50 tấn than. Khi thực hiện, mỗi ngày đội khai thác được 57 tấn. Do đó, đội đã hoàn thành sớm hơn dự định trước 1 ngày và còn vượt mục kế hoạch 13 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội phải khai thác bao nhiêu tấn than ?

**Bài tập 18.** Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 1 giờ thì hoàn thành  $\frac{3}{10}$  công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm bao nhiêu lâu mới hoàn thành công việc ? Biết rằng năng suất của người thứ nhất gấp đôi năng suất của người thứ hai.

**Bài tập 19.** Hai ô tô cùng khởi hành từ Lạng Sơn về Hà Nội. Trong 43km đầu, hai xe có cùng vận tốc. Sau đó chiếc xe thứ hai tăng vận tốc lên gấp 1,2 lần vận tốc ban đầu, trong khi chiếc xe thứ hai vẫn duy trì vận tốc ban đầu. Do đó, xe thứ nhất đã đến Hà Nội sớm hơn xe thứ hai 40 phút. Tính vận tốc ban đầu của hai xe. Biết quãng đường từ Lạng Sơn về Hà Nội dài 163km.

**Bài tập 20.** Một đoàn tàu hỏa đi từ Hà Nội vào thành phố Hồ Chí Minh. Sau 1 giờ 48 phút, một đoàn tàu hỏa khởi hành từ Nam Định cũng đi thành phố Hồ Chí Minh với vận tốc nhỏ hơn của đoàn tàu thứ nhất là 5km/h. Trên đường đi, hai đoàn tàu đã gặp nhau sau 4 giờ 48 phút kể từ khi đoàn tàu thứ nhất khởi hành. Tính vận tốc của mỗi đoàn tàu. Biết rằng ga Nam Định nằm trên đường đi Hà Nội – thành phố Hồ Chí Minh và ga Nam Định cách ga Hà Nội 87km.

**Bài tập 21.** Lúc 7 giờ sáng, một chiếc canô xuôi dòng từ bến A đến bến B rồi ngay lập tức quay trở lại bến A. Tính vận tốc của canô khi đi xuôi dòng. Biết:

- Bến A cách bến B 36km.
- Khi canô quay trở về bến A là 11 giờ 30 phút.
- Vận tốc của dòng nước là 6km/h.

**Bài tập 22.** Một người đi xe máy từ điểm A đến điểm B với vận tốc 60km/h, Cùng lúc đó, một người đi ô tô từ điểm B về A với vận tốc 75km/h và đã gặp người đi xe máy tại điểm C. Hỏi quãng đường AC dài bao nhiêu km. Biết quãng đường AB dài 135km.

**Bài tập 23.** Một xí nghiệp dự định đánh bắt 145 tấn cá trong một thời gian nhất định. Nhưng thực tế mỗi ngày họ đã đánh bắt được vượt kế hoạch 1 tấn nên đã hoàn thành sớm so với dự định 4 ngày và vượt mức kế hoạch 5 tấn. Hỏi thời gian dự định hoàn thành kế hoạch.

**Bài tập 24.** Để chảy đầy một bể nước, người ta có thể cho vòi I chảy trong 1,5 giờ hoặc cho vòi II chảy trong 2 giờ. Người ta đã cho vòi I chảy trong một thời gian, rồi khoá lại và cho vòi II chảy tiếp, tổng cộng trong 1,8 giờ thì bể đầy. Tính xem mỗi vòi đã chảy trong bao lâu ?

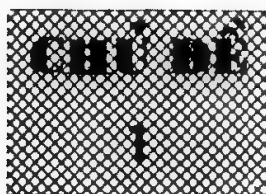
**Bài tập 25.** Một tổ sản xuất phải làm một số dụng cụ trong một thời gian, tính ra mỗi ngày phải làm 30 dụng cụ, Do tổ đã làm mỗi ngày 40 dụng cụ nên không những đã làm thêm 20 dụng cụ mà tổ đó còn làm xong trước hạn 7 ngày. Tính số dụng cụ mà tổ sản xuất đó phải làm theo kế hoạch.



## **CHƯƠNG II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**

Chương này, gồm có:

- 1. Mối liên hệ giữa thứ tự với phép cộng và phép nhân**
- 2. Bất phương trình một ẩn**
- 3. Bất phương trình bậc nhất một ẩn**
- 4. Phương trình chứa dấu trị tuyệt đối**



# MỐI LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ

## VỚI PHÉP CỘNG VÀ PHÉP NHÂN

### 1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. NHẮC LẠI VỀ THỨ TỰ TRÊN TẬP SỐ

Trên tập số thực, với hai số  $a$  và  $b$  sẽ xảy ra một trong các trường hợp sau:

- Số  $a$  bằng số  $b$ , kí hiệu là  $a = b$ .
- Số  $a$  nhỏ hơn số  $b$ , kí hiệu là  $a < b$ .
- Số  $a$  lớn hơn số  $b$ , kí hiệu là  $a > b$ .

từ đó ta có thêm nhận xét:

- Nếu  $a$  không nhỏ hơn  $b$  thì  $a = b$  hoặc  $a > b$ , khi đó ta nói  $a$  lớn hơn hoặc bằng  $b$ , kí hiệu là  $a \geq b$ .
- Nếu  $a$  không lớn hơn  $b$  thì  $a = b$  hoặc  $a < b$ , khi đó ta nói  $a$  nhỏ hơn hoặc bằng  $b$ , kí hiệu là  $a \leq b$ .

#### 2. BẤT ĐẲNG THỨC

Bất đẳng thức là hệ thức có một trong các dạng:  $A > B$ ,  $A \geq B$

$$A < B, A \leq B.$$

#### 3. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

Nhận xét rằng:

- Ta có  $6 > 4$ , nếu cộng hai vế với số 2, ta được:  
 $6 + 2 > 4 + 2 \Leftrightarrow 8 > 6$ , luôn đúng.
- Ta có  $6 > 4$ , nếu cộng hai vế với số  $-3$ , ta được:  
 $6 - 3 > 4 - 3 \Leftrightarrow 3 > 1$ , luôn đúng.

Từ đó, ta có được tính chất:

*Tính chất:* Với ba số  $a$ ,  $b$  và  $c$ , ta có:

- Nếu  $a > b$  thì  $a + c > b + c$ .
- Nếu  $a \geq b$  thì  $a + c \geq b + c$ .
- Nếu  $a < b$  thì  $a + c < b + c$ .
- Nếu  $a \leq b$  thì  $a + c \leq b + c$ .

*Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.*

**Thí dụ 1:** Cho  $a > b$ . Chứng minh rằng  $a - b > 0$ .

*Giải*

Với bất đẳng thức giả thiết:  $a > b$

cộng cả hai vế của bất đẳng thức trên với  $-b$ , ta được:

$$a - b > b - b \Leftrightarrow a - b > 0, \text{ đpcm.}$$

#### 4. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

Nhận xét rằng:

Ta có  $5 > 2$ , nếu nhân hai vế với số 3, ta được:

$$5.3 > 2.3 \Leftrightarrow 15 > 6, \text{ luôn đúng.}$$

Ta có  $5 > 2$ , nếu nhân hai vế với số  $-1$ , ta được:

$$5.(-1) > 2.(-1) \Leftrightarrow -5 > -2, \text{ mâu thuẫn.}$$

Từ đó, ta có được tính chất:

*Tính chất:* Với ba số  $a, b$  và  $c > 0$ , ta có:

- Nếu  $a > b$  thì  $a.c > b.c$ .
- Nếu  $a \geq b$  thì  $a.c \geq b.c$ .
- Nếu  $a < b$  thì  $a.c < b.c$ .
- Nếu  $a \leq b$  thì  $a.c \leq b.c$ .

*Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.*

**Thí dụ 2:** Cho bất đẳng thức  $m > 0$ . Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số nào thì được bất đẳng thức  $\frac{1}{m} > 0$ .

*Giải*

Với bất đẳng thức giả thiết:  $m > 0$

nhân cả hai vế của bất đẳng thức với  $\frac{1}{m^2}$ ; ta được:

$$m. \frac{1}{m^2} > 0. \frac{1}{m^2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} > 0.$$

**Nhận xét:** Như vậy, với  $a, b$  và  $c > 0$ , ta còn có:

- Nếu  $a > b$  thì  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .
- Nếu  $a \geq b$  thì  $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ .
- Nếu  $a < b$  thì  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .
- Nếu  $a \leq b$  thì  $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ .

Vậy, khi nhân hoặc chia cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

**Tính chất:** Với ba số  $a, b$  và  $c < 0$ , ta có:

- Nếu  $a > b$  thì  $a.c < b.c$  và  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .
- Nếu  $a \geq b$  thì  $a.c \leq b.c$  và  $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ .
- Nếu  $a < b$  thì  $a.c > b.c$  và  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .
- Nếu  $a \leq b$  thì  $a.c \geq b.c$  và  $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ .

*Khi nhân hoặc chia cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.*

**Thí dụ 3:** Hãy xác định dấu của số  $a$ , biết:

a.  $6a > 3a$ .

b.  $a \leq \frac{a}{2}$ .

**Giải**

a. Ta viết lại:  $6a > 3a \Leftrightarrow 6.a > 3.a$ . tức là, bất đẳng thức trên có được sau khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức đúng  $6 > 3$  với  $a$ .

Vậy, từ sự cùng chiều của hai bất đẳng thức suy ra  $a > 0$ .

b. Ta viết lại:  $a \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow 1.a \leq \frac{1}{2}.a$  tức là, bất đẳng thức trên có được sau khi

nhân cả hai vế của bất đẳng thức đúng  $1 > \frac{1}{2}$  với  $a$ .

Vậy, từ sự ngược chiều của hai bất đẳng thức suy ra  $a \leq 0$ .

## 5. TÍNH CHẤT BẮC CẦU CỦA THỨ TỰ

Nhận xét rằng:  $8 > 6$  và  $6 > 3 \Rightarrow 8 > 3$ .

**Tính chất:** Với ba số  $a, b$  và  $c$ , nếu  $a > b$  và  $b > c$  thì  $a > c$ .

**Thí dụ 4:** Cho  $a < b$ , chứng minh rằng  $2a - 3 < 2b + 6$ .

**Giải**

Với bất đẳng thức giả thiết:  $a < b$

nhân cả hai vế của bất đẳng thức với 2, ta được:  $2a < 2b$ .

tiếp tục, cộng cả hai vế của bất đẳng thức với  $-3$ , ta được:  $2a - 3 < 2b - 3$ . (1)

Cộng cả hai vế của bất đẳng thức đúng  $-3 < 6$  với  $2b$ , ta được:

$$2b - 3 < 2b + 6. \quad (2)$$

Từ (1), (2) theo tính chất bắc cầu suy ra:  $2a - 3 < 2b + 6$ , đpcm.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho  $a > b > 0$ , hãy chứng tỏ rằng:

a.  $a^2 > ab$ .

b.  $a^3 > b^3$ .

**Giải**

a. Với bất đẳng thức giả thiết:  $a > b$

nhân cả hai vế của bất đẳng thức với  $a > 0$ , ta được:  $a^2 > ab$ , dpcm. (1)

b. Với bất đẳng thức giả thiết:  $a > b$

▪ Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với  $a^2 > 0$ , ta được:  $a^3 > a^2b$ . (2)

▪ Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với  $b > 0$ , ta được:  $ab > b^2$ . (3)

Từ (1) và (3) suy ra:  $a^2 > b^2$ . (4)

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (4) với  $b > 0$ , ta được:  $a^2b > b^3$ . (5)

Từ (2) và (5) suy ra:  $a^3 > b^3$ , dpcm.

**Chú ý:** 1. Bất đẳng thức  $a^2 > ab$  vẫn đúng với điều kiện:

$a > b$  và  $a > 0$  (hoặc  $a < b$  và  $a < 0$ ).

2. Bất đẳng thức  $a^3 > b^3$  vẫn đúng với điều kiện  $a > b$ .

**Ví dụ 2:** Cho  $a > b > 0$ , hãy chứng tỏ rằng  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

**Giải**

Từ giả thiết  $a, b > 0$  suy ra:  $ab > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ab} > 0$ .

Với bất đẳng thức giả thiết:  $a > b$  nhân cả hai vế của bất đẳng thức với  $\frac{1}{ab}$ ,

ta được:  $a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , dpcm.

**Nhân xét:** Ta có kết quả tổng quát hơn:

" Nếu  $a > b$  thì: 
$$\begin{cases} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} & \text{nếu } ab > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} & \text{nếu } ab < 0 \end{cases}$$
 "

**Ví dụ 3:** Cho  $a < b$  và  $c < d$ , hãy chứng tỏ rằng  $a + c < b + d$ .

**Giải**

Với bất đẳng thức giả thiết:  $a < b$

cộng cả hai vế của bất đẳng thức với số  $c$ , ta được:  $a + c < b + c$ . (1)

Với bất đẳng thức giả thiết:  $c < d$

cộng cả hai vế của bất đẳng thức với số  $b$ , ta được:  $b + c < b + d$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $a + c < b + d$ , dpcm.

**Nhân xét:**

1. Bất đẳng thức trên được phát biểu " Khi cộng theo vế của hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với hai bất đẳng thức đã cho".

2. Ta còn có kết quả: "Nếu  $0 < a < b$  và  $0 < c < d$  thì  $a \cdot c < b \cdot d$ "

**Ví dụ 4:** Cho  $a, b$  bất kì, hãy chứng tỏ rằng:

a.  $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ .

b.  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ .

**Giải**

a. Biến đổi tương đương bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

b. Với bất đẳng thức giả thiết:  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$

nhân cả hai vế của bất đẳng thức với 2, ta được:  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

tiếp tục, cộng cả hai vế của bất đẳng thức trên với  $-2ab$ , ta được:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 2ab - 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

**Nhân xét:** 1. Qua ví dụ trên, chúng ta nhận thấy ngay rằng "*Để chứng minh một bất đẳng thức ngoài việc sử dụng các tính chất thức tự với phép cộng và phép nhân chúng ta còn có thể sử dụng các phép biến đổi tương đương để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức luôn đúng hoặc ngược lại (xuất phát từ một bất đẳng thức đúng biến đổi về bất đẳng thức cần chứng minh)*".

2. Xuất phát từ kết quả  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ , nếu đặt  $x = a^2$ ,  $y = b^2$  (khi đó

$x, y \geq 0$ ) thì ta nhận được một bất đẳng thức dạng:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ với } x, y \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên được gọi là *Bất đẳng thức Côsi*.

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu quan hệ thứ tự trên tập số.

**Câu hỏi 2:** Nêu định nghĩa bất đẳng thức và cho ví dụ.

**Câu hỏi 3:** Phát biểu liên hệ giữa thứ tự và phép cộng.

**Câu hỏi 4:** Phát biểu liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương.

**Câu hỏi 5:** Phát biểu liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số âm.

**Câu hỏi 6:** Phát biểu tính chất bắc cầu của thứ tự.

**Câu hỏi 7:** Hãy chứng minh các tính chất sau của bất đẳng thức.

Với  $a, b, c, d$  là các số thực, ta luôn có:

Tính chất 1: Nếu  $a > b$  thì:

$$\begin{cases} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} & \text{nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$$

**Tính chất 2:** Nếu  $a > b$  và  $c > d$  thì  $a + c > b + d$ .

**Chú ý quan trọng:** không áp dụng được "quy tắc" trên cho phép trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

**Tính chất 3:** Nếu  $a > b > 0$  và  $c > d > 0$  thì  $ac > bd$ .

**Tính chất 4:** Nếu  $a > b$  thì: 
$$\begin{cases} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} & \text{nếu } ab > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} & \text{nếu } ab < 0 \end{cases}$$

#### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Hãy sử dụng dấu " $>$ ", " $\geq$ ", " $<$ ", " $\leq$ " để so sánh các số  $a$  và  $b$ , biết:

- a.  $a - b = 0$ .      b.  $a - b = 1$       c.  $b - a = 2$ .

**Bài tập 2.** Hãy xác định dấu của số  $a$ , biết:

- a.  $4a < 3a$ .                      b.  $a \geq \frac{2a}{3}$ .

**Bài tập 3.** Cho  $a > b > 0$ , hãy chứng tỏ rằng:

- a.  $b^2 < ab$ .                      b.  $a^2 > b^2$ .

**Bài tập 4.** Cho bất đẳng thức  $m < 0$ : Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số nào thì được bất đẳng thức  $\frac{1}{m} < 0$ .

**Bài tập 5.** Cho  $a > b$  và  $ab < 0$ , hãy chứng tỏ rằng  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ .

**Bài tập 6.** Cho ví dụ chứng tỏ rằng từ  $a > b$  không thể suy ra  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

**Bài tập 7.** Cho  $0 < a < b$  và  $0 < c < d$ , hãy chứng tỏ rằng  $a.c < b.d$ .

### Bài tập 8. Chứng minh các bất đẳng thức:

- a.  $a^2 - 6a + 10 \geq 1$ .  
b.  $(a - 3)(a - 5) + 2 > 0$ .  
c.  $4a^4 - 4a^3 + a^2 \geq 0$ .  
d.  $a^2 \geq 2b(a - b)$ .

### Bài tập 9. Chứng minh các bất đẳng thức:

- a.  $a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b \geq 0$  với  $a, b$  là các số dương.  
b.  $a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 \geq 0$  với  $a, b$  là các số dương.  
c.  $ab + bc + ca \leq 0$  nếu  $a + b + c = 0$ .

**Bài tập 10.** Chứng minh các bất đẳng thức:

- a.  $(a + b)^2 \geq 4ab$ .                      b.  $\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \geq ab$ .
- c.  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ .

**Bài tập 11.** Biết  $a > b > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

### Bài tập 1.

- a.  $a = b$ .                      b.  $a > b$                       c.  $a < b$ .

### Bài tập 2. Hãy xác định dấu của số a, biết:

- a.  $a < 0$ .                      b.  $a \geq 0$ .

### Bài tập 3. Học sinh tự làm.

### Bài tập 4. Với $m < 0$ , khi đó, ta nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số $\frac{1}{m^2} > 0$

sẽ nhận được bất đẳng thức  $\frac{1}{m} < 0$ .

### Bài tập 5. Ta lần lượt có nhận xét:

- Vì  $ab < 0$  nên a và b trái dấu.
- Vì  $a > b$  nên kết hợp với nhận xét trên suy ra  $a > 0$  và  $b < 0$ .

Khi đó:  $\frac{1}{a} > 0$  và  $\frac{1}{b} < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ .

### Bài tập 6. Chọn $a = 2$ và $b = -3$ , ta thấy ngay: $a > b$ vì $2 > -3$ .

$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  là không thể bởi khi đó  $\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$  là mâu thuẫn.

### Bài tập 7. Ta lần lượt tân dụng:

- Vì  $0 < a < b$  và  $c > 0$  nên  $ac < bc$ . (1)
- Vì  $0 < c < d$  và  $b > 0$  nên  $bc < bd$ . (2)

Từ (1), (2) dựa trên tính chất bắc cầu suy ra  $a.c < b.d$ .

### Bài tập 8.

- a. Ta biến đổi:  $a^2 - 6a + 10 \geq 1 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 3)^2 \geq 0$ , luôn đúng.
- b. Ta biến đổi:  $(a - 3)(a - 5) + 2 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 17 > 0$   
 $\Leftrightarrow (a - 4)^2 + 1 > 0$ , luôn đúng.
- c. Ta biến đổi:  $4a^4 - 4a^3 + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(4a^2 - 4a + 1) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow a^2(2a - 1)^2 \geq 0$ , luôn đúng.
- d. Ta biến đổi:  $a^2 \geq 2b(a - b) \Leftrightarrow a^2 - 2ab + 2b^2 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (a - b)^2 + b^2 \geq 0$ , luôn đúng.

### Bài tập 9.

- a. Ta biến đổi:  $a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$   
Bất đẳng thức trên luôn đúng với a, b là các số dương (vì ta có  $a + b > 0$ ).



b. Ta biến đổi:  $a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 \geq 0 \Leftrightarrow a^4(a - b) - b^4(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^4 - b^4)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b)(a^2 + b^2) \geq 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng với  $a, b$  là các số dương (vì ta có  $a + b > 0$ ).

c. Sử dụng giả thiết:  $a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$

$\Leftrightarrow ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq 0$ , đpcm

## Bài tập 10.

a. Ta biến đổi:  $(a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ , luôn đúng.

b. Ta biến đổi:  $\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$ , tiếp theo biến đổi như câu a).

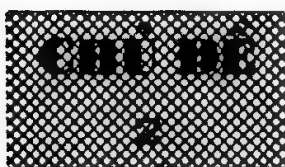
c. Ta biến đổi:  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$ , luôn đúng.

## Bài tập 11. Với $a > b > 0$ ta biến đổi:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ , luôn đúng.



# BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

**Thí dụ 1:** Ta gọi các hệ thức:

▪  $2x + 3 < x - 2$  là một bất phương trình với ẩn số  $x$ .

▪  $3y - 2 \geq y$  là một bất phương trình với ẩn số  $y$ .

...

từ đó ta có được định nghĩa về bất phương trình một ẩn:

*Một bất phương trình với ẩn  $x$  có dạng:*

$$A(x) > B(x) \text{ (hoặc } A(x) < B(x), A(x) \geq B(x), A(x) \leq B(x))$$

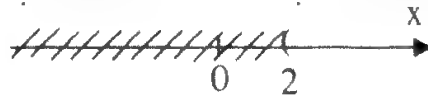
*trong đó về trái  $A(x)$  và về phải  $B(x)$  là hai biểu thức của cùng một biến  $x$ .*

## 2. TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

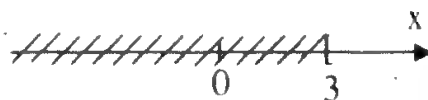
Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình được gọi là *tập nghiệm* của bất phương trình đó.

**Thí dụ 2:** Ta có:

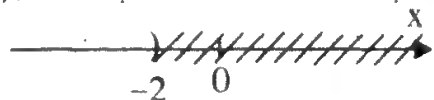
- a. Tập nghiệm của bất phương trình  $x > 2$  là tập hợp các số lớn hơn 2, tức là tập  $\{x | x > 2\}$ , nó được biểu diễn trên trục số như sau:



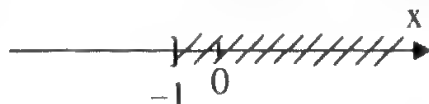
- b. Tập nghiệm của bất phương trình  $x \geq 3$  là tập hợp các số lớn hơn hoặc bằng 3, tức là tập  $\{x | x \geq 3\}$ , nó được biểu diễn trên trục số như sau:



- c. Tập nghiệm của bất phương trình  $x < -2$  là tập hợp các số nhỏ hơn -2, tức là tập  $\{x | x < -2\}$ , nó được biểu diễn trên trục số như sau:



- d. Tập nghiệm của bất phương trình  $x \leq 1$  là tập hợp các số nhỏ hơn hoặc bằng 1, tức là tập  $\{x | x \leq 1\}$ , nó được biểu diễn trên trục số như sau:



Khi bài toán yêu cầu *giải một bất phương trình*, ta phải tìm *tập nghiệm* của bất phương trình đó.

**Thí dụ 3:** Cho bất phương trình:  $x^2 - 4x < 3x$ .

Kiểm tra xem các giá trị sau của  $x$  có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không?

- a.  $x = -2$ .                      b.  $x = 1$ .                      c.  $x = 3$ .

**Giải**

- a. Thay  $x = -2$  và bất phương trình, ta được:

$$(-2)^2 - 4(-2) < 3(-2) \Leftrightarrow 4 + 8 < -6 \Leftrightarrow 12 < -6, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy,  $x = -2$  không phải là nghiệm của bất phương trình.

- b. Thay  $x = 1$  và bất phương trình, ta được:

$$1^2 - 4 \cdot 1 < 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 - 4 < 3 \Leftrightarrow -3 < 3, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy,  $x = 1$  là nghiệm của bất phương trình.

- c. Thay  $x = 3$  và bất phương trình, ta được:

$$3^2 - 4 \cdot 3 < 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 9 - 12 < 9 \Leftrightarrow -3 < 9, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy,  $x = 3$  là nghiệm của bất phương trình.

### 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Hai bất phương trình có cùng một tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương.

**Thí dụ 4:** Hai bất phương trình:  $x > 8$  và  $8 < x$

là hai bất phương trình tương đương. khi đó ta viết:  $x > 8 \Leftrightarrow 8 < x$ .

**Thí dụ 5:** Các cặp bất phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

a.  $x^2 - 2 > x$  và  $x^2 > x + 2$ .

b.  $x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$  và  $x < 1$ .

*Giải*

a. Với bất phương trình:  $x^2 - 2 > x$

cộng 2 vào hai vế của bất phương trình, ta được:

$$x^2 - 2 + 2 > x + 2 \Leftrightarrow x^2 > x + 2.$$

Vậy, hai bất phương trình đã cho tương đương.

b. Nhận xét rằng, số 0 là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.

Vậy, hai bất phương trình đã cho không tương đương.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho bất phương trình:  $x^2 - 4x \leq 2x - 8$ .

Kiểm tra xem các giá trị sau của  $x$  có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không?

a.  $x = 0$ .

b.  $x = 3$ .

c.  $x = 4$ .

*Giải*

a. Thay  $x = 0$  vào bất phương trình, ta được:  $0 \leq -8$ , mâu thuẫn.

Vậy,  $x = 0$  không phải là nghiệm của bất phương trình.

b. Thay  $x = 3$  vào bất phương trình, ta được:

$$3^2 - 4 \cdot 3 \leq 2 \cdot 3 - 8 \Leftrightarrow 9 - 12 \leq 6 - 8 \Leftrightarrow -3 \leq -2, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy,  $x = 3$  là nghiệm của bất phương trình.

c. Thay  $x = 4$  vào bất phương trình, ta được:

$$4^2 - 4 \cdot 4 \leq 2 \cdot 4 - 8 \Leftrightarrow 16 - 16 \leq 8 - 8 \Leftrightarrow 0 \leq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy,  $x = 4$  là nghiệm của bất phương trình.

**Chú ý:**

Ta có  $0 \leq 0$  cũng là một bất đẳng thức đúng, bởi:

$$a \geq b \text{ khi và chỉ khi } a > b \text{ hoặc } a = b.$$

**Ví dụ 2:** Viết thành bất phương trình và chỉ ra một nghiệm của nó từ các mệnh đề sau:

- Tổng của một số nào đó và 4 lớn hơn 9.
- Hiệu của 8 và 3 lần số nào đó nhỏ hơn 11.

**Giải**

- Gọi số cần tìm là  $x$ .  
 Từ giả thiết "*Tổng của  $x$  và 4 lớn hơn 9*", ta được:  $x + 4 > 9$ .  
 Ta có thể chọn  $x = 6$  là một nghiệm của bất phương trình trên.
- Gọi số cần tìm là  $x$ .  
 Từ giả thiết "*Hiệu của 8 và 3 lần số  $x$  nhỏ hơn 11*", ta được:  $8 - 3x < 11$ .  
 Ta có thể chọn  $x = 0$  là một nghiệm của bất phương trình trên.

**Ví dụ 3:** Hãy chỉ ra hai nghiệm trái dấu cho các bất phương trình sau:

- $|x - 3| < 6$ .
- $|x + 1| \geq 8$ .

**Giải**

- Ta chọn được hai nghiệm là  $x = -1$  và  $x = 6$ , thật vậy:
  - Với  $x = -1$ , ta có:  $|-1 - 3| < 6 \Leftrightarrow |-4| < 6 \Leftrightarrow 4 < 6$ , luôn đúng.
  - Với  $x = 6$ , ta có:  $|6 - 3| < 6 \Leftrightarrow |3| < 6 \Leftrightarrow 3 < 6$ , luôn đúng.
- Ta chọn được hai nghiệm là  $x = -9$  và  $x = 8$ , thật vậy:
  - Với  $x = -9$ , ta có:  $|-9 + 1| \geq 8 \Leftrightarrow |-8| \geq 8 \Leftrightarrow 8 \geq 8$ , luôn đúng.
  - Với  $x = 8$ , ta có:  $|8 + 1| \geq 8 \Leftrightarrow |9| \geq 8 \Leftrightarrow 9 \geq 8$ , luôn đúng.

**Ví dụ 4:** Các cặp bất phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

- $x + 1 < 2x$  và  $3x < 4x - 1$ .
- $x > 3$  và  $x^2 - 4x + 3 > 0$ .

**Giải**

- Với bất phương trình:  $x + 1 < 2x$   
 cộng  $2x - 1$  vào hai vế của bất phương trình, ta được:  
 $x + 1 + 2x - 1 < 2x + 2x - 1 \Leftrightarrow 3x < 4x - 1$ .  
 Vậy, hai bất phương trình đã cho tương đương.
- Nhận xét rằng,  $x = 0$  là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.  
 Vậy, hai bất phương trình đã cho không tương đương.

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Cho một vài ví dụ về bất phương trình một ẩn.

**Câu hỏi 2:** Cho ví dụ một bất phương trình vô nghiệm.

**Câu hỏi 3:** Cho ví dụ một bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .

**Câu hỏi 4:** Thế nào là giải bất phương trình  $A(x) > B(x)$ ?

**Câu hỏi 5:** Định nghĩa hai bất phương trình tương đương.

#### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Viết tập nghiệm của bất phương trình sau bằng kí hiệu tập hợp và biểu diễn tập nghiệm đó trên trục số:

- a.  $3 > x$ .                      b.  $x < -2$ .                      c.  $x \geq -1$ .                      d.  $x \leq 8$ .

**Bài tập 2.** Cho ví dụ một bất phương trình có:

- a. Tập hợp nghiệm là bất kì số nào.                      b. Tập hợp nghiệm bằng  $\emptyset$ .

**Bài tập 3.** Tìm các số  $x$  thoả mãn cả hai bất phương trình sau:

- a.  $x > 3$  và  $x < 8$ .                      b.  $x > 5$  và  $x > 3$ .                      c.  $x > 2$  và  $x < -1$ .

**Bài tập 4.** Cho bất phương trình:  $10x - 15 \geq x^2 + 6$ .

Kiểm tra xem các giá trị sau của  $x$  có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không?

- a.  $x = 5$ .                      b.  $x = -2$ .                      c.  $x = 7$ .

**Bài tập 5.** Cho bất phương trình:  $x + 20 > x^2$ .

- a. Hãy kiểm tra xem các số  $-5, 1, 3$  có phải là nghiệm của bất phương trình không?
- b. Gọi  $S$  là tập hợp các số  $x$  thoả mãn  $-4 < x < 5$ . Chọn một phần tử bất kì của tập hợp  $S$ , chứng tỏ nó là nghiệm của bất phương trình đã cho.

**Bài tập 6.** Cho bất phương trình:  $x^2 + 3 > 4x$ .

- a. Hãy kiểm tra xem các số  $0, 2, 4$  có phải là nghiệm của bất phương trình không?
- b. Đặt  $S = \{x \mid x < 1 \text{ hoặc } x > 3\}$ . Chọn một phần tử bất kì của tập hợp  $S$ , chứng tỏ nó là nghiệm của bất phương trình đã cho.

**Bài tập 7.** Viết thành bất phương trình và chỉ ra một nghiệm của nó từ các mệnh đề sau:

- a. Tổng của 3 lần số nào đó và 8 lớn hơn  $-1$ .
- b. Tổng của một số nào đó và 3 lớn hơn hoặc bằng  $11$ .
- c. Hiệu của 9 và 4 lần số nào đó không nhỏ hơn 8.

**Bài tập 8.** Hãy chỉ ra hai nghiệm trái dấu cho các bất phương trình sau:

- a.  $|x - 2| < 11$ .                      b.  $|3 - x| > 5$ .
- c.  $|2x + 1| \geq 3$ .                      d.  $|1 - 3x| < 9$ .

**Bài tập 9.** Các cặp bất phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

- a.  $2 - x < 0$  và  $x - 2 > 0$ .                      d.  $x < 1$  và  $x^2 < 1$ .
- b.  $|x - 2| < 0$  và  $|2 - x| < 0$ .                      e.  $x > 3$  và  $x^2 > 9$ .
- c.  $x + \frac{2}{x} < 1 + \frac{2}{x}$  và  $x < 1$ .

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

### Bài tập 1.

- a.  $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 3\}$ .                      b.  $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -2\}$ .  
c.  $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq -1\}$ .                      d.  $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 8\}$ .

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

### Bài tập 2.

- a. Bất phương trình  $x^2 + 1 > 0$  có tập hợp nghiệm là bất kì số nào.  
b. Bất phương trình  $x^2 + 1 < 0$  có tập hợp nghiệm bằng  $\emptyset$ .

### Bài tập 3. Tìm các số $x$ thoả mãn cả hai bất phương trình sau:

- a.  $3 < x < 8$ .                      b.  $x > 5$ .                      d. Không tồn tại.

### Bài tập 4.

- a.  $x = 5$  là nghiệm của bất phương trình.  
b.  $x = -2$  không là nghiệm của bất phương trình.  
c.  $x = 7$  là nghiệm của bất phương trình.

### Bài tập 5. Học sinh tự làm.

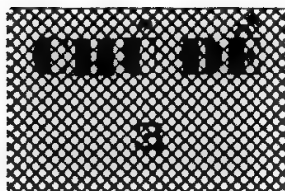
### Bài tập 6. Học sinh tự làm.

### Bài tập 7. Học sinh tự làm.

### Bài tập 8. Học sinh tự làm.

### Bài tập 9.

- a. Khi nhân hai vế của bất phương trình  $2 - x < 0$  với  $-1$ , ta được:  $x - 2 > 0$  đó chính là bất phương trình còn lại.  
Vậy, hai bất phương trình là tương đương.
- b. Ta luôn có  $|a| = |-a|$  nên bất phương trình:  
 $|x - 2| < 0 \Leftrightarrow |- (x - 2)| < 0 \Leftrightarrow |2 - x| < 0$   
đó chính là bất phương trình còn lại.  
Vậy, hai bất phương trình là tương đương.
- c. Hai bất phương trình đã cho là không tương đương, bởi:
- $x = 0$  là nghiệm của bất phương trình  $x < 1$ .
  - $x = 0$  không thể là nghiệm của bất phương trình  $x + \frac{2}{x} < 1 + \frac{2}{x}$ .
- d. Hai bất phương trình đã cho là không tương đương, bởi:
- $x = -2$  là nghiệm của bất phương trình  $x < 1$ .
  - $x = -2$  không thể là nghiệm của bất phương trình  $x^2 < 1$ .
- e. Hai bất phương trình đã cho là không tương đương, bởi:
- $x = -4$  là nghiệm của bất phương trình  $x^2 > 9$ .
  - $x = -4$  không thể là nghiệm của bất phương trình  $x > 3$ .



# BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. HAI QUY TẮC BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

#### 1.1. Quy tắc chuyển vế

Với các bất đẳng thức, ta có thể biến đổi:

$$a + b < c \Leftrightarrow a + b - c < 0 \rightarrow \text{chuyển vế và đổi dấu}$$

và với các bất phương trình chúng ta cũng có được quy tắc như vậy, cụ thể:

*(Quy tắc chuyển vế): Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải đổi dấu hạng tử đó.*

Sử dụng quy tắc trên, bước đầu chúng ta có thể giải được một vài bất phương trình đơn giản, thí dụ sau sẽ minh họa điều này.

**Thí dụ 1:** Sử dụng quy tắc chuyển vế giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a.  $x + 3 < 4$ .

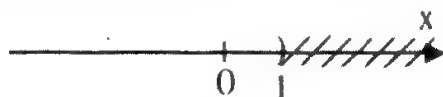
b.  $3x \geq 2x - 2$ .

*Giải*

a. Sử dụng quy tắc chuyển vế, biến đổi phương trình về dạng:

$$x + 3 < 4 \Leftrightarrow x < 4 - 3 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x < 1$  và ta có biểu diễn:



b. Sử dụng quy tắc chuyển vế, biến đổi phương trình về dạng:

$$3x \geq 2x - 2 \Leftrightarrow 3x - 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x \geq -2$  và ta có biểu diễn:



#### 1.2. Quy tắc nhân với một số

Với các bất đẳng thức, ta có thể biến đổi:

$$2a + 4b > -2 \Leftrightarrow 1 + 2b = -1 \rightarrow \text{nhân cả hai vế với } \frac{1}{2} > 0$$

(hoặc chia cả hai vế cho  $2 > 0$ )

$$-3a < 6 \Leftrightarrow a > -2 \rightarrow \text{nhân cả hai vế với } -\frac{1}{3} < 0$$

(hoặc chia cả hai vế cho  $-3 < 0$ )





**Nhận xét:**

1. Trong lời giải các phương trình trên, chúng ta đã thừa nhận rằng kết quả "*Từ một bất phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân, ta luôn nhận được một bất phương trình mới tương đương với bất phương trình đã cho*".
2. Cũng chính nhờ những quy tắc này mà việc chứng minh một bất đẳng thức sẽ đơn giản hơn rất nhiều - *Điều này chúng ta sẽ gặp lại trong chủ đề chuyên sâu về bất đẳng thức ở cuối chương.*

**2. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**

**Định nghĩa:** Bất phương trình dạng:

$$ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0,$$

với  $a$  và  $b$  là hai số đã cho và  $a \neq 0$ , được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

**Thí dụ 4:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn:

a.  $(m^2 - 2m)x^2 + mx + 3 > 0$ .

b.  $mx + (m - 1)y + 4 \leq 0$ .

**Giải**

a. Để bất phương trình:  $(m^2 - 2m)x^2 + mx + 3 > 0$

là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m - 2) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hoặc } m = 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, với  $m = 2$  bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn  $x$ .

b. Để bất phương trình:  $mx + (m - 1)y + 4 \leq 0$

là bất phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

**Trường hợp 1:** Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $x$  khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

**Trường hợp 2:** Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $y$  khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

**Kết luận:**

- Với  $m = 1$ , bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn  $x$ .
- Với  $m = 0$ , bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn  $y$ .

Bất phương trình bậc nhất một ẩn dạng:  $ax + b > 0$ ,  $a \neq 0$   
được giải như sau:  $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$ .

- Với  $a > 0$ , ta được  $x > -\frac{b}{a}$ .
- Với  $a < 0$ , ta được  $x < -\frac{b}{a}$ .

**Thí dụ 5:** Giải các bất phương trình sau:

a.  $2x - 3 > 0$ .

b.  $6 - 3x \leq 0$ .

**Giải**

a. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:  $2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ .

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x > \frac{3}{2}$ .

b. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:  $-3x \leq -6 \Leftrightarrow x \geq 2$ .

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x \geq 2$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** So sánh số  $a$  với số  $b$ , biết:

a.  $x < 2 \Leftrightarrow (a - b)x < 2(a - b)$ .

b.  $x > 8 \Leftrightarrow (a - b)x < 8(a - b)$ .

**Giải**

a. Nhận xét rằng:

- Hai bất phương trình  $x < 2$  và  $(a - b)x < 2(a - b)$  là hai bất phương trình cùng chiều.
- Bất phương trình thứ hai có được sau khi nhân hai vế của bất phương trình thứ nhất với số  $(a - b)$ .

Suy ra:  $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$ .

b. Nhận xét rằng:

- Hai bất phương trình:  $x > 8$  và  $(a - b)x < 8(a - b)$  là hai bất phương trình ngược chiều.
- Bất phương trình thứ hai có được sau khi nhân hai vế của bất phương trình thứ nhất với số  $(a - b)$ .

Suy ra:  $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$ .

**Ví dụ 2:** Giải các bất phương trình sau:

a.  $-4x + 12 > 0$ .

b.  $3 - 4x \geq 19$ .

c.  $(m^2 + 1)x - m^4 < -1$ , với  $m$  là tham số,

**Giải**

- a. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:  $-4x > -12 \Leftrightarrow x < 3$ .

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x < 3$ .

- b. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$-4x \geq 19 - 3 \Leftrightarrow -4x \geq 16 \Leftrightarrow x \leq -4.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x \leq -4$ .

- c. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:  $(m^2 + 1)x < m^4 - 1$ . (\*)

Vì  $m^2 + 1$  luôn dương với mọi  $m$  nên khi chia cả hai vế của bất phương trình (\*) cho  $m^2 + 1$  thì dấu bất phương trình không thay đổi, cụ thể ta được:

$$x < \frac{m^4 - 1}{m^2 + 1} = \frac{(m^2 - 1)(m^2 + 1)}{m^2 + 1} = m^2 - 1 \Leftrightarrow x < m^2 - 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x < m^2 - 1$ .

**Ví dụ 3:** Cho bất phương trình:  $(m^2 - 2m)x + 1 < m$ .

Giải bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

- a.  $m = 1$ .                      b.  $m = 2$ .                      c.  $m = 3$ .

**Giải**

- a. Với  $m = 1$ , bất phương trình có dạng:

$$(1^2 - 2 \cdot 1)x + 1 < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Vậy, với  $m = 1$  bất phương trình có nghiệm  $x > 0$ .

- b. Với  $m = 2$ , bất phương trình có dạng:

$$(2^2 - 2 \cdot 2)x + 1 < 2 \Leftrightarrow 0x < 1, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với  $m = 2$  bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .

- c. Với  $m = 3$ , bất phương trình có dạng:

$$(3^2 - 2 \cdot 3)x + 1 < 3 \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}.$$

Vậy, với  $m = 3$  bất phương trình có nghiệm  $x < \frac{2}{3}$ .

**Ví dụ 4:** Tìm  $x$  để  $A < 0$ , biết:  $A = 1 - \frac{2x + 3}{2}$ .

**Giải**

Trước tiên ta đi rút gọn biểu thức  $A$ :

$$A = 1 - \frac{2x + 3}{2} = \frac{2 - 2x - 3}{2} = \frac{-2x - 1}{2}.$$

Để  $A < 0$ , ta phải có:  $\frac{-2x-1}{2} < 0 \Leftrightarrow -2x-1 < 0 \Leftrightarrow -2x < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ .

Vậy, với  $x > -\frac{1}{2}$  thoả mãn điều kiện đầu bài.

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Định nghĩa bất phương trình bậc nhất một ẩn và cho ví dụ.

**Câu hỏi 2:** Phát biểu hai quy tắc biến đổi bất phương trình.

**Câu hỏi 3:** Hai quy tắc biến đổi bất phương trình cũng giống như hai quy tắc biến đổi phương trình. Điều này có đúng không?

**Câu hỏi 4:** Nếu phương pháp giải bất phương trình bậc nhất một ẩn.

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Hãy nhân hai vế của mỗi bất phương trình sau với một số thích hợp để đưa bất phương trình về dạng  $x < a$  hoặc  $x > a$ :

- a.  $2x > -4$ .      b.  $\frac{1}{3}x < 3$ .      c.  $8x > 32$ .      d.  $27x > -3$ .

**Bài tập 2.** Dùng các phép biến đổi tương đương để đưa các bất phương trình sau về dạng  $x < a$  hoặc  $x > a$ :

- a.  $3x + 2 < 8$ .      b.  $5 - 4x < -7$ .  
c.  $(2m^2 + 1)x - 4m^4 < -1$ , với  $m$  là tham số.

**Bài tập 3.** So sánh số  $a$  với số  $b$ , biết:

- a.  $x > 6 \Leftrightarrow (a - b)x < 6(a - b)$ .      b.  $x > 2 \Leftrightarrow (a - b)x > -2(b - a)$ .

**Bài tập 4.** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn:

- a.  $m(m^2 - 1)x^2 + mx + 6 > 0$ .      b.  $mx + (m + 2)y + 8 < 0$ .

**Bài tập 5.** Giải các bất phương trình:

- a.  $2x - 1 > 3$ .      b.  $8 - 4x < 6$ .

**Bài tập 6.** Tìm  $x$  biết:

- a.  $2x - 1 > 0$ .      c.  $x^2 - 5x < x^2 + 1$ .  
b.  $8 - 4x < 0$ .      d.  $2x + 1 > 5x - 2$ .

**Bài tập 7.** Tìm  $x$  để biểu thức sau có giá trị dương:

- a.  $\frac{1}{2}x - 3$ .      b.  $5x^2 + 11$ .      c.  $\frac{3-2x}{x^2+1}$ .      d.  $\frac{2x^2-4x}{x-2}$ .

**Bài tập 8.** Cho bất phương trình:  $(m^2 - 4m + 3)x + 1 \geq m$ .

Giải bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

- a.  $m = 0$ .                      b.  $m = 1$ .                      c.  $m = 3$ .

**Bài tập 9.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình ẩn  $x$ :

- a.  $x - 3 = m + 4$  có nghiệm lớn hơn 2.  
b.  $2x - 3 = 2m + 8$  có nghiệm dương.  
c.  $3x - 1 = 6m + 8$  có nghiệm không nhỏ hơn 6.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 2.**

- a.  $x < 3$ .  
b.  $x > 3$ .  
c. Ta biến đổi:  $(2m^2 + 1)x - 4m^4 < -1 \Leftrightarrow (2m^2 + 1)x < 4m^4 - 1$   
 $\Leftrightarrow (2m^2 + 1)x < (2m^2 + 1)(2m^2 - 1)$ . (1)  
Vì  $2m^2 + 1 > 0$  với mọi  $m$  nên: (1)  $\Leftrightarrow x < 2m^2 - 1$ .  
Vậy, bất phương trình được chuyển thành  $x < 2m^2 - 1$ .

**Bài tập 3.**

- a.  $a < b$ .    b.  $a > b$ .

**Bài tập 4.**

- a. Để bất phương trình:  $m(m^2 - 1)x^2 + mx + 6 > 0$   
là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m(m^2 - 1) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hoặc } m = \pm 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với  $m = m(m^2 - 1)x^2 + mx + 6 > 0$  bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn  $x$ .

- b. Để bất phương trình:  $mx + (m + 2)y + 8 < 0$ .  
là bất phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

**Trường hợp 1:** Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $x$  khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

**Trường hợp 2:** Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $y$  khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m = 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

**Kết luận:**

- Với  $m = -2$ , bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn  $x$ .
- Với  $m = 0$ , bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn  $y$ .

**Bài tập 5.**

a.  $x > 2$ .

b.  $x > \frac{1}{2}$ .

**Bài tập 6.**

a.  $x > \frac{1}{2}$ .

b.  $x > 2$ .

c.  $x > -\frac{1}{5}$ .

d.  $x < 1$ .

**Bài tập 7.**

a.  $x > 6$ .

b. Mọi  $x$ .

c.  $x < \frac{3}{2}$ .

d. Trước tiên ta cần có  $x \neq 2$ .

Khi đó, điều kiện là:  $0 < \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = \frac{2x(x - 2)}{x - 2} = 2x \Leftrightarrow x > 0$ .

Vậy điều kiện để biểu thức dương là  $0 < x \neq 2$ .

**Bài tập 8.** Viết lại bất phương trình:  $(m^2 - 4m + 3)x \geq m - 1$ .

a. Với  $m = 0$ , bất phương trình có dạng:  $3x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ .

Vậy, với  $m = 0$  bất phương trình có nghiệm  $x \geq -\frac{1}{3}$ .

b. Với  $m = 1$ , bất phương trình có dạng:  $0x \geq 0$ , luôn đúng.

Vậy, với  $m = 1$  bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .

c. Với  $m = 3$ , bất phương trình có dạng:  $0x \geq 2$ , mâu thuẫn.

Vậy, với  $m = 3$  bất phương trình vô nghiệm.

**Bài tập 9.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình ẩn  $x$ :

a. Phương trình có nghiệm:  $x = m + 7$

Khi đó, để nghiệm của phương trình lớn hơn 2 điều kiện là:

$$m + 7 > 2 \Leftrightarrow m > -5.$$

Vậy, với  $m > -5$  thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Phương trình có nghiệm:  $x = m + \frac{11}{2}$ .

Khi đó, để nghiệm của phương trình dương điều kiện là:

$$m + \frac{11}{2} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{11}{2}.$$

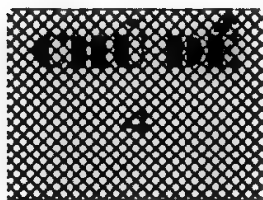
Vậy, với  $m > -\frac{11}{2}$  thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Phương trình có nghiệm:  $x = 2m + 3$ .

Khi đó, để nghiệm của phương trình không nhỏ hơn 6 điều kiện là:

$$2m + 3 \geq 6 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}.$$

Vậy, với  $m \geq \frac{3}{2}$  thoả mãn điều kiện đầu bài.



# BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG BẬC NHẤT

## I. PHƯƠNG PHÁP

Với những bất phương trình đưa được về dạng  $ax + b \leq 0$  thông qua các phép biến đổi đại số thông thường, phương pháp giải được minh họa bởi các thí dụ sau:

**Thí dụ 1:** Giải bất phương trình:  $3(2x - 1) - (5x + 3) < -x$ .

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} 6x - 3 - 5x - 3 &< -x \rightarrow \text{Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc} \\ \Leftrightarrow 6x - 5x + x &< 3 + 3 \rightarrow \text{Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang VT, các hằng số sang VP.} \\ \Leftrightarrow 2x &< 6 \rightarrow \text{Thu gọn, ta nhận được bất phương trình dạng } ax = -b \\ \Leftrightarrow x &< 3. \rightarrow \text{Sử dụng quy tắc chia để nhận được nghiệm của bất phương trình.} \end{aligned}$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x < 3$ .

**Thí dụ 2:** Giải bất phương trình:  $\frac{x-1}{4} - 1 > 8 + \frac{x+1}{3}$ .

*Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} \frac{3(x-1)-12}{12} &> \frac{96+4(x+1)}{12} \rightarrow \text{Quy đồng mẫu số hai vế.} \\ \Leftrightarrow 3x - 15 &> 100 + 4x \rightarrow \text{Nhân hai vế với 12 để khử mẫu.} \\ \Leftrightarrow -4x + 3x &> 100 + 15 \rightarrow \text{Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang VT, các hằng số sang VP.} \\ \Leftrightarrow -x &> 115 \Leftrightarrow x < -115. \rightarrow \text{Thu gọn.} \end{aligned}$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x < -115$ .

**Nhận xét:**

1. Như vậy, để giải những bất phương trình đưa được về dạng  $ax + b \leq 0$  hoặc  $ax \leq -b$ , ta thực hiện theo các bước:

*Bước 1:* Bằng việc sử dụng phép toán bỏ dấu ngoặc hay quy đồng mẫu ... để biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng  $ax + b \leq 0$  hoặc  $ax \leq -b$ .

**Bước 2** Giải bất phương trình nhận được, từ đó kết luận.

2. Tuy nhiên, trong một số trường hợp chúng ta cần linh hoạt để nhận được những cách biến đổi đơn giản hơn, thí dụ:

$$\frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{12} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

3. Quá trình biến đổi bất phương trình có thể dẫn đến trường hợp đặc biệt là hệ số của ẩn bằng 0. Khi đó, bất phương trình có thể vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi  $x$ , thí dụ:

- Bất phương trình:

$$3x + 1 < 3x - 1 \Leftrightarrow 3x - 3x < -1 - 1 \Leftrightarrow 0 < -2$$

$\Rightarrow$  Bất phương trình vô nghiệm.

- Bất phương trình:  $x + 2 \leq x + 6 \Leftrightarrow x - x \leq 6 - 2 \Leftrightarrow 0 \leq 4$

$\Rightarrow$  Bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải bất phương trình:  $11 - 3(x + 1) > 2(x - 3) - 5$ .

*Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$11 - 3(x + 1) > 2(x - 3) - 5 \Leftrightarrow 11 - 3x - 3 > 2x - 6 - 5$$

$$\Leftrightarrow -3x - 2x > -6 - 5 - 11 + 3 \Leftrightarrow -5x > -19 \Leftrightarrow x < \frac{19}{5}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x < \frac{19}{5}$ .

**Ví dụ 2:** Giải bất phương trình:  $3 - \frac{x-3}{12} < x - \frac{x-3}{8}$ .

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

**Cách 1:** Nhân hai vế của bất phương trình với 24, được:

$$72 - 2(x - 3) < 24x - 3(x - 3) \Leftrightarrow 72 - 2x + 6 < 24x - 3x + 9$$

$$\Leftrightarrow -2x - 24x + 3x < 9 - 72 - 6 \Leftrightarrow -23x < -69 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x > 3$ .

**Cách 2:** Biến đổi bất phương trình về dạng:  $\frac{x-3}{8} - x + 3 - \frac{x-3}{12} < 0$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{12}\right) < 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x > 3$ .



**Nhận xét:**

Trong lời giải của cách 2, ta không máy móc quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức, bởi xuất phát từ nhận xét về nhân tử chung  $x - 3$ , điều này sẽ giúp giảm đáng kể độ phức tạp trong lời giải.

**Ví dụ 3:** Cho biểu thức:  $A = \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{2}$ .

Tìm các giá trị của  $x$  sao cho giá trị của  $A$  lớn hơn  $-1$  nhưng nhỏ hơn  $1$ . Biểu diễn trên trục số các giá trị tìm được của  $x$ .

**Giải**

Trước tiên ta đi rút gọn biểu thức  $A$ :

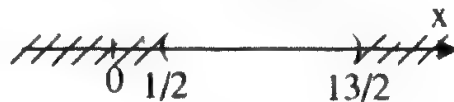
$$A = \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{2} = \frac{x+1-3(x-2)}{6} = \frac{x+1-3x+6}{6} = \frac{7-2x}{6}$$

- Để  $A > -1$  điều kiện là:

$$\frac{7-2x}{6} > -1 \Leftrightarrow 7-2x > -6 \Leftrightarrow -2x > -6-7 \Leftrightarrow x < \frac{13}{2}$$

- Để  $A < 1$  điều kiện là:  $\frac{7-2x}{6} < 1 \Leftrightarrow 7-2x < 6 \Leftrightarrow -2x < 6-7 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ .

Vậy, để có được  $-1 < A < 1$  điều kiện là  $\frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}$  và ta có biểu diễn:



Cách biểu diễn trên trục được thực hiện như sau:

1. Xác định vị trí của các điểm  $\frac{1}{2}$  và  $\frac{13}{2}$ .
2. Giữ nguyên đoạn thẳng từ điểm  $\frac{1}{2}$  đến điểm  $\frac{13}{2}$ .
3. Gạch chéo phần còn lại, gạch cả điểm  $\frac{1}{2}$  và  $\frac{13}{2}$ .

**Ví dụ 4:** Trong cuộc thi bắn súng, mỗi hạ thủ được bắn 10 phát. Mỗi lần trúng đích được 5 điểm, mỗi lần trượt bị trừ 1 điểm. Xạ thủ nào đạt được 30 điểm trở lên thì được thưởng. Hỏi xạ thủ phải bắn trúng đích bao nhiêu lần được thưởng?

**Giải**

Gọi số lần bắn trúng đích là  $x$ , điều kiện  $x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 10$ . (\*)

Vì:

- Mỗi hạ thủ được bắn 10 phát nên số lần bắn trượt là  $10 - x$ , khi đó tổng số điểm đạt được là  $5x - (10 - x)$ .

- Muốn được thưởng, tổng số điểm phải đạt từ 30 điểm trở lên, do đó:

$$5x - (10 - x) \geq 30 \Leftrightarrow 5x - 10 + x \geq 30 \Leftrightarrow 6x \geq 40 \Leftrightarrow x \geq \frac{20}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện (\*), ta được:

$$x \in \mathbb{N}, \frac{20}{3} \leq x \leq 10 \Rightarrow x = 7, x = 8, x = 9, x = 10.$$

Vậy, để nhận được thưởng thì số lần bắn trúng đích phải là 7 lần, hoặc 8 lần, hoặc 9 lần, hoặc 10 lần.

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu các bước giải những bất phương trình đưa được về dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn.

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a.  $3x - 5 > 2x.$

b.  $3x < 2x + 3.$

c.  $2 + 2x < 2(x + 2).$

d.  $2x - 3 > 5 - (3 - 2x).$

**Bài tập 2.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a.  $5x - 2 < 2(x - 1) - (2 - 3x).$

c.  $(x - 2)^2 > x(x + 3).$

b.  $(x - 3)(x + 3) < x(x - 6).$

d.  $(x + 2)^2 \geq 2x(x + 2) + 4.$

**Bài tập 3.** Giải các bất phương trình:

a.  $x^2 + 2(x - 3) - 1 > x(x + 5) + 5.$

b.  $(x - 1)(x + 5) < (x - 3)(x + 5).$

c.  $(x + 2)(x + 4) < (x - 2)(x + 8) + 26.$

**Bài tập 4.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a.  $\frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{4} < 1.$

b.  $\frac{2x-1}{4} + 2 < \frac{5x-1}{8}.$

c.  $\frac{2x+1}{6} - \frac{x-2}{2} < 3.$

d.  $\frac{2x-7}{3} < \frac{4-3x}{9}.$

**Bài tập 5.** Giải các bất phương trình:

a.  $2x - \frac{x+1}{3} + \frac{3x+2}{6} > \frac{x}{2} + 3.$

b.  $\frac{x+4}{5} - x + 3 < \frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2}.$

**Bài tập 6.** Giải các bất phương trình:

a.  $\frac{5x-1}{5} - \frac{3x+1}{2} > 0.$

c.  $\frac{1-x}{3} + \frac{2x-3}{12} < 0.$

b.  $\frac{2x-1}{4} - \frac{3x+4}{6} < 0.$

**Bài tập 7.** Tìm các số tự nhiên  $n$  thoả mãn bất phương trình:

a.  $3(4n-5) < 2n+27.$

b.  $(n+2)^2 - 40 < (n-3)(n+3).$

**Bài tập 8.** Tìm các giá trị của  $x$  thoả mãn cả hai bất phương trình sau và biểu diễn trên trục số:

a.  $6x-3 < 4x-1$  và  $5x+1 > 3x-3.$

b.  $3x-1 > x-2$  và  $4x-1 > 2x-3.$

**Bài tập 9.** Tìm giá trị của  $x$  để biểu thức sau có giá trị dương:

a.  $A = \frac{5-2x}{x^2+4}.$

c.  $C = \frac{x+27}{5} - \frac{3x-7}{4}.$

b.  $B = \frac{2x-5}{6} + \frac{5x-2}{3}.$

**Bài tập 10.** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{x+5}{1-x^2} \right) : \frac{2x+1}{x^2-1}.$

a. Rút gọn biểu thức  $A.$

b. Tìm các giá trị của  $x$  để  $A > 0.$

**V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ**

**Bài tập 1.**

a.  $x > 5.$

b.  $x < 3.$

c. Mọi  $x.$

d.  $\emptyset.$

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

**Bài tập 2.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a.  $\emptyset.$

b.  $x < \frac{3}{2}.$

c.  $x < \frac{4}{7}.$

d.  $x = 0.$

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

**Bài tập 3.**

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x^2 + 2x - 6 - 1 > x^2 + 5x + 5 \Leftrightarrow 3x < -12 \Leftrightarrow x < -4.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x < -4.$

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(x+5)(x-1-x+3) < 0 \Leftrightarrow x+5 < 0 \Leftrightarrow x < -5.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x < -5.$

c. Mọi  $x.$

**Bài tập 4.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a.  $x < -2$ .      b.  $x > 15$ .      c.  $x > -11$ .      d.  $x < \frac{25}{9}$ .

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

**Bài tập 5.**

a.  $x > \frac{9}{5}$ .      b.  $x > \frac{79}{19}$ .

**Bài tập 6.**

a.  $x < -\frac{7}{5}$ .      b. Mọi  $x$ .      c.  $x > \frac{1}{2}$ .

**Bài tập 7.**

a. Biến đổi biểu thức về dạng:  $10n < 42 \Leftrightarrow n < 4,2$

Suy ra, ta chọn được  $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$ .

b. Biến đổi biểu thức về dạng:  $4n < 25 \Leftrightarrow n < 6,25$

Suy ra, ta chọn được  $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, n = 5, n = 6$ .

**Bài tập 8.** Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

a. Ta lần lượt giải các bất phương trình:

$$6x - 3 < 4x - 1 \Leftrightarrow x < 1.$$

$$5x + 1 > 3x - 3 \Leftrightarrow x > -2.$$

Vậy, với  $-2 < x < 1$  thoả mãn cả hai bất phương trình.

b. Ta lần lượt giải các bất phương trình:

$$3x - 1 > x - 2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

$$4x - 1 > 2x - 3 \Leftrightarrow x > -1.$$

Vậy, với  $x > -\frac{1}{2}$  thoả mãn cả hai bất phương trình.

**Bài tập 9.** Tìm giá trị của  $x$  để biểu thức sau có giá trị dương:

a.  $x < \frac{5}{2}$ .      b.  $x > \frac{3}{4}$ .      c.  $x < 13$ .

**Bài tập 10.** Để  $A$  có nghĩa điều kiện là  $x \neq \pm 1$ .

a. Ta có:  $A = \frac{x-1-2(x+1)+x+5}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{2x+1} = \frac{2}{2x+1}$ .

b. Để  $A > 0$ , điều kiện là:  $\frac{2}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ .

Vậy, để  $A > 0$  điều kiện là  $-\frac{1}{2} < x \neq 1$ .

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc giải bất phương trình:

$$ax - 8 < 0 \Leftrightarrow ax < 8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{a}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm  $x < \frac{8}{a}$ .

**Nhân xét:**

Ta thấy ngay:

1. Với  $a = 1$  thì nghiệm là  $x < 8$ , tức lời giải trên là đúng.
2. Với  $a = 0$  thì  $\frac{8}{a}$  không xác định do đó lời giải trên là sai.
3. Với  $a = -2$  thì theo cách giải trên ta nghiệm là  $x < -4$ .  
Tuy nhiên, thực tế với  $a = -2$  bất phương trình có dạng:  
 $-2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2x < 8 \Leftrightarrow x > -4$ .

Tức lời giải trên là sai.

Như vậy, khi giải bất phương trình có hệ số chữ, ta cần chú ý đến các trường hợp nhỏ hơn 0, bằng 0 và lớn hơn 0 của hệ số của  $x$ , đó được gọi là "*Giải và biện luận bất phương trình theo tham số*".

### 2. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

**Bài toán:** Giải và biện luận phương trình

$$ax + b < 0.$$

#### PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Viết lại bất phương trình dưới dạng:  $ax < -b$ .

(1)

Ta xét ba trường hợp:

*Trường hợp 1:* Nếu  $a = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 0 < -b \Leftrightarrow b < 0$ .

Vậy, ta được:

- Nếu  $b < 0$ , bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- Nếu  $b \geq 0$ , bất phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2:* Nếu  $a > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$ .

*Trường hợp 3:* Nếu  $a < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$ .

Kết luận:

- Với  $a = 0$  và  $b < 0$ , bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .
- Với  $a = 0$  và  $b \geq 0$ , bất phương trình vô nghiệm.
- Với  $a > 0$ , nghiệm của bất phương trình là  $x < -\frac{b}{a}$ .
- Với  $a < 0$ , nghiệm của bất phương trình là  $x > -\frac{b}{a}$ .

**Thí dụ 1:** Giải và biện luận bất phương trình:  $mx + 1 \leq -m^2$ .

*Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng:  $mx \leq -m^2 - 1$ . (1)

Xét ba trường hợp:

*Trường hợp 1:* Với  $m = 0$ , ta được:  $(1) \Leftrightarrow 0 \leq -1$ , mâu thuẫn.

*Trường hợp 2:* Với  $m > 0$ , ta được:  $(1) \Leftrightarrow x \leq -\frac{m^2 + 1}{m}$ .

*Trường hợp 3:* Với  $m < 0$ , ta được:  $(1) \Leftrightarrow x \geq -\frac{m^2 + 1}{m}$ .

Kết luận: – Với  $m = 0$ , bất phương trình vô nghiệm.

– Với  $m > 0$ , bất phương trình có nghiệm là  $x \leq -\frac{m^2 + 1}{m}$ .

– Với  $m < 0$ , bất phương trình có nghiệm là  $x \geq -\frac{m^2 + 1}{m}$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải và biện luận bất phương trình:  $mx - 2 > x - 3m$ .

*Giải*

Viết lại bất phương trình dưới dạng:  $(m - 1)x > 2 - 3m$ . (1)

Xét ba trường hợp:

*Trường hợp 1:* Với  $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ .

$(1) \Leftrightarrow 0x > -1$  (luôn đúng), bất phương trình nghiệm đúng  $\forall x$ .

*Trường hợp 2:* Với  $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ .

$(1) \Leftrightarrow x > \frac{2 - 3m}{m - 1}$ , là nghiệm của bất phương trình.

*Trường hợp 3:* Với  $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ .

$(1) \Leftrightarrow x < \frac{2 - 3m}{m - 1}$ , là nghiệm của bất phương trình.

Kết luận: – Với  $m = 1$ , bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .

– Với  $m > 1$ , bất phương trình có nghiệm là  $x > \frac{2 - 3m}{m - 1}$ .

– Với  $m < 1$ , bất phương trình có nghiệm là  $x < \frac{2 - 3m}{m - 1}$ .

**Ví dụ 2:** Tìm  $m$  để bất phương trình:  $m^2x + 4m - 3 < x + m^2$  vô nghiệm.

*Giải.*

Viết lại bất phương trình dưới dạng:  $(m^2 - 1)x - (m^2 - 4m + 3) < 0$ . (1)

Khi đó, bất phương trình vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -(m^2 - 4m + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với  $m = 1$  bất phương trình vô nghiệm:

**Ví dụ 3:** Xác định  $m$  sao cho hai bất phương trình sau tương đương

$$(m - 1)x - m + 3 > 0 \text{ và } (m + 1)x - m + 2 > 0.$$

*Giải*

Viết lại các bất phương trình dưới dạng:  $(m - 1)x > m - 3$  (1)

$(m + 1)x > m - 2$ . (2)

Ta đi xét các trường hợp:

*Trường hợp 1:* Nếu  $m = 1$ .

(1)  $\Leftrightarrow 0x > -2$ , luôn đúng.

(2)  $\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ .

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

*Trường hợp 2:* Nếu  $m = -1$ .

(1)  $\Leftrightarrow x < 2$ .

(2)  $\Leftrightarrow 0x > -3$ , luôn đúng.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

*Trường hợp 3:* Nếu  $m \neq \pm 1$ .

$$\text{Khi đó, (1) và (2) tương đương} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)(m + 1) > 0 \\ \frac{m - 3}{m - 1} = \frac{m - 2}{m + 1} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy, với  $m = 5$ , hai bất phương trình tương đương với nhau.

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Hãy trình bày phương pháp giải và biện luận bất phương trình:  $ax + b < 0$ .

**Câu hỏi 2:** Hãy trình bày phương pháp giải và biện luận bất phương trình:  $ax + b \leq 0$ .

**Câu hỏi 3:** Hãy trình bày phương pháp giải và biện luận bất phương trình:  $ax + b > 0$ .

**Câu hỏi 4:** Hãy trình bày phương pháp giải và biện luận bất phương trình:  $ax + b \geq 0$ .

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải và biện luận các bất phương trình:

$$(m^2 + m + 1)x + 3m > (m^2 + 2)x + 5m - 1.$$

**Bài tập 2.** Giải và biện luận các bất phương trình:

a  $x + \frac{x-1}{m+1} > \frac{x+1}{m+1} - mx.$

b  $x + \frac{x-1}{m} > \frac{x+1}{m} - (m+1)x, \text{ với } m \neq 0.$

**Bài tập 3.** Giải và biện luận bất phương trình:  $x + 1 > \frac{ax}{b} + \frac{b}{a}$ , với  $a, b > 0$ .

## V. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 1:** Biến đổi bất phương trình về dạng:  $(m-1)x > 2m-1$ .

- Với  $m = 1$ , ta được:  $0 > -1$ , luôn đúng.
- Với  $m > 1$ , ta được:  $x > \frac{2m-1}{m-1}$ .
- Với  $m < 0$ , ta được:  $x < \frac{2m-1}{m-1}$ .

**Bài tập 2:**

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x + \frac{x}{m+1} - \frac{1}{m+1} > \frac{x}{m+1} + \frac{1}{m+1} - mx \Leftrightarrow (m+1)x > \frac{2}{m+1}.$$

- Với  $m = -1$ , bất phương trình vô nghiệm.
- Với  $m > -1$ , ta được:  $x > \frac{2}{(m+1)^2}$ .
- Với  $m < -1$ , ta được:  $x < \frac{2}{(m+1)^2}$ .

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

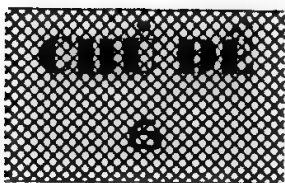
$$x + \frac{x}{m} - \frac{1}{m} > \frac{x}{m} + \frac{1}{m} - (m+1)x \Leftrightarrow (m+2)x > \frac{2}{m}.$$

- Với  $m = -2$ , bất phương trình vô nghiệm.
- Với  $m > -2$ , ta được:  $x > \frac{2}{m(m+2)}$ .
- Với  $m < -2$ , ta được:  $x < \frac{2}{m(m+2)}$ .

**Bài tập 3:** Biến đổi bất phương trình về dạng:  $a(a-b)x < b(a-b)$ .

- Với  $a = b$ , bất phương trình vô nghiệm.
- Với  $a > b$ , ta được:  $x < \frac{b}{a}$ .
- Với  $a < b$ , ta được:  $x > \frac{b}{a}$ .





## PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. NHẮC LẠI VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Với số  $a$ , ta có:  $|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$

Tương tự như vậy, với đa thức ta cũng có:  $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

**Thí dụ 1:** Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:

- a.  $A = |x - 4| + x - 3$  khi  $x \geq 4$ .      b.  $B = 2x + 3 - |1 - 2x|$  khi  $x \geq \frac{1}{2}$ .
- b.  $C = |x - 2| + |2x - 3| + 2x + 1$  khi  $x > 2$ .
- c.  $D = |x - 1| + 2x - 3$ .

*Giải*

- a. Với giả thiết  $x \geq 4$ , ta suy ra:  $x - 4 \geq 0 \Rightarrow |x - 4| = x - 4$ .

Do đó, A được viết lại:  $A = x - 4 + x - 3 = 2x - 7$ .

- b. Với giả thiết  $x \geq \frac{1}{2}$ , ta suy ra:  $1 - 2x \leq 0 \Rightarrow |1 - 2x| = -(1 - 2x)$ .

Do đó, B được viết lại:  $B = 2x + 3 - [-(1 - 2x)] = 2x + 3 + 1 - 2x = 4$ .

- c. Với giả thiết  $x > 2$ , ta suy ra:  $x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$ .

$2x - 3 > 0 \Rightarrow |2x - 3| = 2x - 3$ .

Do đó, C được viết lại:  $C = x - 2 + 2x - 3 + 2x + 1 = 5x - 4$ .

- d. Ta đi xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1:* Khi  $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ , ta được:  $D = x - 1 + 2x - 3 = 3x - 4$ .

*Trường hợp 2:* Khi  $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ , ta được:  $D = -(x - 1) + 2x - 3 = x - 2$ .

Tóm lại:  $D = \begin{cases} 3x - 4 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

**Nhận xét:**

Xuất phát từ nội dung trong thí dụ trên, người ta có thể phát triển thành yêu cầu giải phương trình chứa dấu trị tuyệt đối, cụ thể:

- a. Tìm các nghiệm  $x \geq 4$  của phương trình:

$$|x - 4| + x - 3 = 0.$$

- b. Tìm các nghiệm  $x \geq \frac{1}{2}$  của phương trình:

$$2x + 3 = |1 - 2x|.$$

c. Tìm các nghiệm  $x > 2$  của phương trình:

$$|x - 2| + |2x - 3| + 2x + 1 = 0.$$

d. Giải phương trình:

$$|x - 1| + 2x - 3 = 0.$$

## 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Trong phạm vi kiến thức lớp 8 chúng ta sẽ chỉ quan tâm tới ba dạng phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, bao gồm:

Dạng 1: Phương trình:  $|f(x)| = k$ , với  $k$  là hằng số không âm.

Dạng 2: Phương trình:  $|f(x)| = |g(x)|$ .

Dạng 3: Phương trình:  $|f(x)| = g(x)$ .

Để tiện tiếp cận với kiến thức cho từng dạng phương trình, tài liệu này sẽ trình bày theo kiểu thứ tự.

**Bài toán 1:** Giải phương trình:  $|f(x)| = k$ , với  $k$  là hằng số không âm.

*Phương pháp giải*

Thực hiện theo các bước:

**Bước 1:** Đặt điều kiện để  $f(x)$  xác định (nếu cần).

**Bước 2:** Khi đó:  $|f(x)| = k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k \\ f(x) = -k \end{cases} \Rightarrow \text{nghiệm } x.$

**Bước 3:** Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

**Thí dụ 2:** Giải các phương trình sau:

a.  $|2x - 3| = 1.$

b.  $\left| \frac{x+1}{x} \right| - 2 = 0.$

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình:  $|2x - 3| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 1 \\ 2x - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 + 3 \\ 2x = -1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm  $x = 2$  và  $x = 1$ .

b. Điều kiện xác định của phương trình là  $x \neq 0$ .

Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x} = 2 \\ \frac{x+1}{x} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2x \\ x+1 = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x = -1 \\ x + 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm  $x = 1$  và  $x = -\frac{1}{3}$ .

**Bài toán 2:** Giải phương trình :  $|f(x)| = |g(x)|$ .

*Phương pháp giải*

Thực hiện theo các bước:

**Bước 1:** Đặt điều kiện để  $f(x)$  và  $g(x)$  xác định (nếu cần).

**Bước 2:** Khi đó:  $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \Rightarrow \text{nghiệm } x.$

**Bước 3:** Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

**Thí dụ 3:** Giải các phương trình sau:

a.  $|2x + 3| = |x - 3|$ .

b.  $\left| \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} \right| - |x| = 0.$

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình:  $|2x + 3| = |x - 3|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = x - 3 \\ 2x + 3 = -(x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x = -3 - 3 \\ 2x + x = 3 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm  $x = -6$  và  $x = 0$ .

b. Điều kiện xác định của phương trình là  $x \neq 0$ .

Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left| \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} \right| = |x| \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = x \\ \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = -x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 = x(x + 1) \\ x^2 - x + 2 = -x(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2x^2 = -2, \text{ vô nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 1$ .

**Bài toán 3:** Giải phương trình :  $|f(x)| = g(x)$ .

*Phương pháp giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

**Cách 1:** (Phá dấu trị tuyệt đối) Thực hiện theo các bước:

**Bước 1:** Đặt điều kiện để  $f(x)$  và  $g(x)$  xác định (nếu cần).

**Bước 2:** Xét hai trường hợp:

**Trường hợp 1:** Nếu  $f(x) \geq 0$ . (1)

Phương trình có dạng:  $f(x) = g(x) \Rightarrow$  nghiệm  $x$  và kiểm tra điều kiện (1).

**Trường hợp 2:** Nếu  $f(x) < 0$ . (2)

Phương trình có dạng:  $-f(x) = g(x)$

$\Rightarrow$  nghiệm  $x$  và kiểm tra điều kiện (2).

**Bước 3:** Kết luận nghiệm cho phương trình.

**Cách 2:** Thực hiện theo các bước:

**Bước 1:** Đặt điều kiện để  $f(x)$  và  $g(x)$  xác định (nếu cần) và  $g(x) \geq 0$ .

**Bước 2:** Khi đó:  $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \Rightarrow \text{nghiệm } x.$

**Bước 3:** Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

**Thí dụ 4:** Giải phương trình:  $|x + 4| + 3x = 5$ .

**Giải**

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

**Cách 1:** Xét hai trường hợp:

**Trường hợp 1:** Nếu  $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$ . (1)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$x + 4 + 3x = 5 \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}, \text{ thoả mãn điều kiện (1).}$$

**Trường hợp 2:** Nếu  $x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -4$ . (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} -(x + 4) + 3x &= 5 \Leftrightarrow 2x = 9 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{2}, \text{ không thoả mãn điều kiện } (2). \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{1}{4}$ .

**Cách 2:** Viết lại phương trình dưới dạng:  $|x + 4| = 5 - 3x$ .

Với điều kiện:  $5 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$ . (\*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:  $|x + 4| = 5 - 3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 5 - 3x \\ x + 4 = -(5 - 3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{9}{2} \end{cases} \text{ không thoả mãn (*)}$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{1}{4}$ .

**Chú ý:** Qua thí dụ trên, đối với các em học sinh hẳn thấy rằng " *Cả hai cách giải được trình bày đều có độ phức tạp như nhau*". Chính vì vậy, tại đây đặt ra một câu hỏi " *Trong trường hợp nào cách 1 tỏ ra hiệu quả hơn cách 2 và ngược lại?*" - Câu trả lời các em sẽ nhận được trong phần các ví dụ minh họa.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:

- a.  $A = |x - 2| + 3x - 2$  khi  $x > 2$ .  
 b.  $B = |x - 3| + |3 - 2x| + x + 8$  khi  $x > 3$ .

*Giải*

- a. Với giả thiết  $x > 2$ , ta suy ra:  $x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$ .  
 Do đó, A được viết lại:  $A = x - 2 + 3x - 2 = 4x - 4$ .  
 b. Với giả thiết  $x > 3$ , ta suy ra:  $x - 3 > 0 \Rightarrow |x - 3| = x - 3$ .  
 $3 - 2x < 0 \Rightarrow |3 - 2x| = -(3 - 2x)$ .  
 Do đó, B được viết lại:  
 $B = x - 3 - (3 - 2x) + x + 8 = x - 3 - 3 + 2x + x + 8 = 3x + 2$ .

**Ví dụ 2:** Giải phương trình:  $|2x - 3m| = |x + 6|$ , với m là tham số.

*Giải*

Biến đổi tương đương phương trình:

$$\begin{aligned} |2x - 3m| = |x + 6| &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3m = x + 6 \\ 2x - 3m = -(x + 6) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x = 6 + 3m \\ 2x + x = -6 + 3m \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 3m \\ x = m - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm  $x = 6 + 3m$  và  $x = m - 2$ .

**Ví dụ 3:** Giải phương trình:  $\left| \frac{x+2}{x-2} \right| = 1$ .

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là  $x \neq 2$ .

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1:* Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left| \frac{x+2}{x-2} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x-2} = 1 \\ \frac{x+2}{x-2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = x-2 \\ x+2 = -(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 0$ .

Cách 2: Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left| \frac{x+2}{x-2} \right| = 1 \Leftrightarrow |x+2| = |x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = x-2 \\ x+2 = -(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 0$ .

**Ví dụ 4:** Giải phương trình:  $|x - 2| + 3x = 4$ .

**Giải**

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu  $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ . (1)

Khi đó, phương trình có dạng:  $x - 2 + 3x = 4 \Leftrightarrow 4x = 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ , không thoả mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu  $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ . (2)

Khi đó, phương trình có dạng:  $-(x - 2) + 3x = 4 \Leftrightarrow 2x = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$ , thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 1$ .

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng:  $|x - 2| = 4 - 3x$ .

Với điều kiện:  $4 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$ . (\*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:  $|x - 2| = 4 - 3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 - 3x \\ x - 2 = -(4 - 3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \text{ không thoả mãn (*)} \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 1$ .

**Chú ý:** Ví dụ tiếp theo sẽ trả lời câu hỏi "Trong trường hợp nào cách 1 tỏ ra hiệu quả hơn cách 2 và ngược lại?".

**Ví dụ 5:** Giải các phương trình:

a.  $|x + 1| = x^2 + x$ .

b.  $|x^2 - 2x| + 4 = 2x$ .

**Giải**

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu  $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ . (1)

Khi đó, phương trình có dạng:  $x + 1 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ , thoả mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu  $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ . (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$-(x + 1) = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow x = -1$ , không thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có hai nghiệm  $x = \pm 1$ .

b. Viết lại phương trình dưới dạng:  $|x^2 - 2x| = 2x - 4$ .

Với điều kiện:  $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ . (\*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:  $|x^2 - 2x| = 2x - 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 2x - 4 \\ x^2 - 2x = -(2x - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \text{ không thoả mãn (*)} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 2$ .

**Nhân xét:**

1. Trong câu a), chúng ta đã lựa chọn cách 1 để thực hiện là bởi nếu sử dụng cách 2 chúng ta sẽ gặp một bất lợi khi phải giải bất phương trình  $x^2 + x \geq 0$ . Tuy nhiên, cũng có thể khắc phục được vấn đề này bằng việc " *Không đi giải điều kiện mà cứ tiếp tục thực hiện sau đó thử lại*", cụ thể:

Với điều kiện:  $x^2 + x \geq 0$ . (\*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:  $|x + 1| = x^2 + x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = x^2 + x \\ x + 1 = -(x^2 + x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ (x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Thử lại:

- Với  $x = 1$  ta được  $x^2 + x = 1^2 + 1 = 2 \geq 0$  luôn đúng.
- Với  $x = -1$  ta được  $x^2 + x = (-1)^2 - 1 = 0 \geq 0$  luôn đúng.

Vậy, phương trình có hai nghiệm  $x = \pm 1$ .

2. Trong câu b), chúng ta đã lựa chọn cách 2 để thực hiện là bởi nếu sử dụng cách 1 chúng ta sẽ gặp một bất lợi khi phải giải bất phương trình  $x^2 - 2x \geq 0$  và  $x^2 - 2x < 0$ . Tuy nhiên, cũng có thể khắc phục được vấn đề này bằng việc " *Không đi giải điều kiện mà cứ tiếp tục thực hiện sau đó thử lại*" - Đề nghị bạn đọc tự làm.

3. Một câu hỏi sẽ được đặt ra tại đây là "Với một phương trình có dạng đặc biệt hơn một chút (thí dụ  $2/|x-1| = x^2 - 2x - 2$ ) thì ngoài việc lựa chọn một trong hai cách giải đã biết thì còn có một phương pháp giải khác không?" - Câu trả lời "Đương nhiên sẽ có". Ví dụ sau sẽ minh hoạ phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình này.

**Ví dụ 6:** Giải phương trình:  $2|x-1| = x^2 - 2x - 2$ .

**Giải**

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x^2 - 2x + 1) - 2|x-1| - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2|x-1| - 3 = 0. \quad (1)$$

Đặt  $t = |x-1|$ , điều kiện  $t \geq 0$ .

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow t(t+1) - 3(t+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t-3) = 0 \quad \begin{matrix} t \geq 0 \\ t+1 \geq 1 \end{matrix} \Leftrightarrow t = 3.$$

$$\text{Với } t = 3, \text{ ta được: } \Leftrightarrow |x-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là  $x = 4$  hoặc  $x = -2$ .

**Chú ý:** Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng một ví dụ để minh hoạ phương pháp giải phương trình chứa nhiều hơn 1 dấu giá trị tuyệt đối.

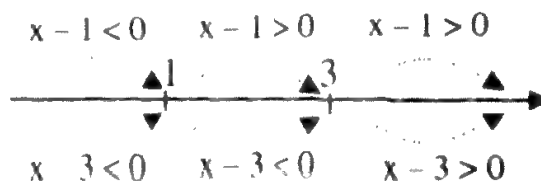
**Ví dụ 7:** Giải phương trình:  $|x-1| + |x-3| = 2$ .

**Giải**

Nhận xét rằng:

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1,$$

$$x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3,$$



do đó, để thực hiện việc bỏ dấu giá trị tuyệt đối cho phương trình chúng ta cần phải xét ba trường hợp.

**Trường hợp 1:** Nếu  $x \leq 1$ . (1)

$$\text{Khi đó, phương trình có dạng: } -(x-1) - (x-3) = 2 \Leftrightarrow -2x + 4 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1, \text{ thoả mãn điều kiện (1).}$$

**Trường hợp 2:** Nếu  $1 < x < 3$ . (2)

$$\text{Khi đó, phương trình có dạng: } (x-1) - (x-3) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2, \text{ luôn đúng.}$$

**Trường hợp 3:** Nếu  $x \geq 3$ . (3)

$$\text{Khi đó, phương trình có dạng: } (x-1) + (x-3) = 2 \Leftrightarrow 2x - 4 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3, \text{ thoả mãn điều kiện (3).}$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $1 \leq x \leq 3$ .



**Chú ý:** Qua kết quả của phương trình trên, chúng ta nhận thấy một điều rất thú vị là nghiệm của phương trình có thể là một đoạn trên trục số.

**Ví dụ 8:** Giải phương trình:  $\frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} = 2.$  (1)

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là  $x \neq -1$ .

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1:* Đặt  $t = \frac{|x+1|}{3}$ , điều kiện  $t > 0$ .

Khi đó: (1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{t} + t = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Leftrightarrow \frac{|x+1|}{3} = 1 \Leftrightarrow |x+1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm  $x = 2$  và  $x = -4$ .

*Cách 2:* Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$VT = \frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{|x+1|} \cdot \frac{|x+1|}{3}} = 2 = VP.$

Vậy phương trình tương đương với:

$\frac{3}{|x+1|} = \frac{|x+1|}{3} \Leftrightarrow 9 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm  $x = 2$  và  $x = -4$ .

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Hãy trình bày phương pháp giải bất phương trình:

$|f(x)| = k$ , với  $k$  là hằng số không âm.

**Câu hỏi 2:** Hãy trình bày phương pháp giải bất phương trình:  $|f(x)| = |g(x)|$ .

**Câu hỏi 3:** Hãy trình bày phương pháp giải bất phương trình:  $|f(x)| = g(x)$ .

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:

a.  $A = |x - 3| + x - 2$  trong hai trường hợp  $x \geq 3$  và  $x < 3$ .

b.  $B = 2x + 3 - | - 2x|$  trong hai trường hợp  $x \geq 1$  và  $x < 0$ .

c.  $C = |x - 4| - 3x + 11$  trong hai trường hợp  $x \geq 5$  và  $x < 3$ .

d.  $D = |x - 1| + |x - 2| + |2x - 5|$  trong hai trường hợp  $x > 4$  và  $x < -1$ .

**Bài tập 2.** Giải các phương trình:

a.  $|x - 4| = 5$ .

b.  $|2x - 3| = 4$ .

c.  $|3 - 2x| = 7$ .

d.  $|1 - 5x| - 1 = 3$ .

**Bài tập 3.** Giải các phương trình:

a.  $|2x - 3| + 2 = 8$ .

b.  $|4x + 3| + 1 = 0$ .

c.  $4|2x - 1| + 3 = 15$ .

d.  $3|x - 1| - 3 = 5$ .

**Bài tập 4.** Giải các phương trình:

a.  $|x - 3| = |2x|$ .

b.  $|2x - 1| = |x - 1|$ .

c.  $|3x - 1| = |x - 2|$ .

c.  $|5x - 4| = |4 - 3x|$ .

**Bài tập 5.** Giải các phương trình:

a.  $\left| \frac{x-1}{x} \right| = 2$ .

b.  $\left| \frac{2x-1}{x-1} \right| - 1 = 0$ .

**Bài tập 6.** Giải các phương trình:

a.  $|x - 2| = 18 - 3x$ .

b.  $|x + 3| = 2x - 1$ .

c.  $|5x - 3| = x + 7$ .

d.  $|5 - 2x| + x = 1$ .

**Bài tập 7.** Giải các phương trình sau với m là tham số:

a.  $|x - 2m| = |3x + 4|$ .

b.  $|3x + 2| = |x - 2m|$ .

**Bài tập 8.** \* Giải các phương trình:

a.  $|x - 1| = x^2 - x$ .

b.  $|x - 1| = x^3 + x + 1$ .

c.  $|4x^2 - 2x| + 1 = 2x$ .

d.  $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$ .

**Bài tập 9.** \* Giải các phương trình sau với m là tham số:

a.  $|mx + 1| = |x + 1|$ .

b.  $| (m + 2)x - 3 | = | mx - 4 |$ .

**Bài tập 10.** Giải và biện luận phương trình:

a.  $|mx + 1| = |2x + m - 3|$ .

b.  $|x - 1| = mx + 2m - 1$ .

b.  $2(|x| + m - 1) = |x| - m + 3$ .

**Bài tập 11.** \* Giải các phương trình:

a.  $|x - 2| + |x - 4| = 2$ .

b.  $|x - 1| + |2x - 6| = 7$ .

c.  $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 6$ .

d.  $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$ .

**V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ****Bài tập 1.**

a. Ta có:  $A = \begin{cases} 2x - 5 & \text{khi } x \geq 3 \\ 1 & \text{khi } x < 3 \end{cases}$

b. Ta có:  $B = \begin{cases} 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

c. Ta có:  $C = \begin{cases} -2x + 7 & \text{khi } x \geq 5 \\ -4x + 15 & \text{khi } x < 3 \end{cases}$

d. Ta có:  $D = \begin{cases} 4x - 8 & \text{khi } x > 4 \\ -4x - 8 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$

### Bài tập 2.

a.  $x = 9, x = -1.$

b.  $x = \frac{7}{2}, x = -\frac{1}{2}.$

b.  $x = 5, x = -2.$

d.  $x = 1, x = -\frac{3}{5}.$

### Bài tập 3.

a.  $x = \frac{9}{2}, x = -\frac{3}{2}.$

b. Vô nghiệm.

c.  $x = 2, x = -1.$

d.  $x = \frac{11}{3}, x = -\frac{5}{3}.$

### Bài tập 4.

a.  $x = -3, x = 1.$

b.  $x = 0, x = \frac{2}{3}.$

c.  $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{4}.$

d.  $x = 1, x = 0.$

### Bài tập 5.

a.  $x = -1, x = \frac{1}{3}.$

b.  $x = 0, x = \frac{2}{3}.$

### Bài tập 6. Giải các phương trình:

a.  $x = 5.$

b.  $x = 4.$

c.  $x = \frac{5}{2}, x = -\frac{2}{3}.$

d.  $x = 3.$

### Bài tập 7. Giải các phương trình sau với m là tham số:

a.  $x = m - 2, x = \frac{1}{2}(m - 2).$

b.  $x = -m - 1, x = \frac{1}{2}(m - 1).$

### Bài tập 8.

a. Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1:* Nếu  $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$  (1)

Khi đó, phương trình có dạng:  $x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ , thỏa mãn điều kiện (1).

*Trường hợp 2:* Nếu  $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$  (2)

Khi đó, phương trình có dạng:  $-x + 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

$\Rightarrow x = -1$ , thỏa mãn điều kiện (2). Vậy, phương trình có hai nghiệm  $x = \pm 1.$

b. Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1:* Nếu  $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$  (1)

Khi đó, phương trình có dạng:  $x - 1 = x^3 + x + 1 \Leftrightarrow x^3 = -2$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$ , không thỏa mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu  $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ . (2)

Khi đó, phương trình có dạng:  $-x + 1 = x' + x + 1 \Leftrightarrow x' + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ , thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = 0$ .

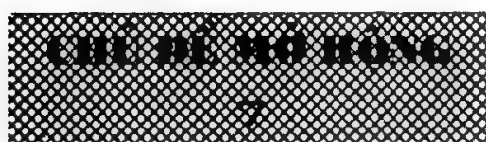
c. Biến đổi phương trình về dạng:  $|4x^2 - 2x| = 2x - 1$ .

Với điều kiện:  $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ . (\*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:  $|4x^2 - 2x| = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 2x = 2x - 1 \\ 4x^2 - 2x = -(2x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 = 0 \\ 4x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 1)^2 = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm  $x = \frac{1}{2}$ .



## BẤT ĐẲNG THỨC

### MỞ ĐẦU

#### 1. ĐỊNH NGHĨA

Bất đẳng thức là hệ thức có một trong các dạng:  $A > B, A \geq B$

$A < B, A \leq B$ .

#### 2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Với  $a, b, c, d$  là các số thực, ta luôn có:

**Tính chất 1:** Nếu  $a > b \Leftrightarrow b < a$ .

**Tính chất 2:** Nếu  $a > b$  và  $b > c$  thì  $a > c$ .

**Tính chất 3:** Nếu  $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ .

**Tính chất 4:** Nếu  $a > b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ nếu } c < 0 \end{cases}.$$

**Tính chất 5:** Nếu  $a > b$  và  $c > d$  thì  $a + c > b + d$ .

**Chú ý quan trọng:** không áp dụng được "quy tắc" trên cho phép trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

Tính chất 6: Nếu  $a > b > 0$  và  $c > d > 0$  thì  $ac > bd$ .

Tính chất 7: Nếu  $a > b$  thì: 
$$\begin{cases} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} & \text{nếu } ab > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} & \text{nếu } ab < 0 \end{cases}$$

Tính chất 8: Nếu  $a > b$  thì  $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Tính chất 9: Nếu  $a > b \geq 0$  thì  $a^n > b^n$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Tính chất 10: Nếu  $a > b \geq 0$  thì  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## Bài toán

### I

## CÁC PHƯƠNG PHÁP

## CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

### I. PHƯƠNG PHÁP

**Bài toán:** Chứng minh bất đẳng thức:  $A > B$ .

#### PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

*Phương pháp 1:* Phương pháp chứng minh bằng định nghĩa. Khi đó ta lựa chọn theo các hướng:

*Hướng 1:* Chứng minh  $A - B > 0$ .

*Hướng 2:* Thực hiện các phép biến đổi đại số để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức đúng.

*Hướng 3:* Xuất phát từ bất đẳng thức đúng.

*Hướng 4:* Biến đổi về trái hoặc về phải.

*Phương pháp 2:* Sử dụng tính chất bắc cầu, tức là chứng minh:  $A > C$  và  $C > B$ .

*Phương pháp 3:* Phương pháp chứng minh phản chứng, được áp dụng với các bài toán yêu cầu chứng minh ít nhất một bất đẳng thức trong các bất đẳng thức đã cho là đúng hoặc sai.

*Phương pháp 4:* Phương pháp hình học, bằng việc sử dụng tính chất:

"Nếu  $a, b, c$  là độ ba cạnh của một tam giác thì  $a + b > c$  và  $|a - b| < c$ ".

### II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng với mọi số thực  $a, b, c$  luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

*Giải*

Ta có ba cách trình bày theo phương pháp 1 (mang tính minh họa), như sau:

**Cách 1:** Ta biến đổi bất đẳng thức như sau:  $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2} \right) + \left( \frac{b^2}{2} - bc + \frac{c^2}{2} \right) + \left( \frac{c^2}{2} - ca + \frac{a^2}{2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

**Cách 2:** Ta biến đổi bất đẳng thức như sau:  $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

**Cách 3:** Ta luôn có:

$$\begin{cases} (a - b)^2 \geq 0 \\ (b - c)^2 \geq 0 \\ (c - a)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \\ c^2 + a^2 - 2ca \geq 0 \end{cases} \quad (I)$$

Cộng theo vế các bất phương trình trong hệ (I), ta được:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \text{ đpcm.}$$

**Nhận xét:** Như vậy, thông qua ví dụ trên đã minh họa cho các em học sinh thấy được ba hướng chứng minh bất đẳng thức khi sử dụng phương pháp 1 và sau đây ta sẽ minh họa bằng một ví dụ cho hướng 4.

**Ví dụ 2:** Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  luôn có:  $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} < 1$ .

**Giải**

Nhận xét rằng:  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ,

do đó:  $\forall T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \text{ đpcm.}$

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng với mọi  $a, b \in \mathbb{R}$  luôn có:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$$

**Giải**

Ta đi chứng minh với mọi  $x, y$  luôn có:  $\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^3+y^3}{2} \leq \frac{x^4+y^4}{2}. \quad (*)$

Thật vậy:  $(*) \Leftrightarrow (x+y)(x^3+y^3) \leq 2(x^4+y^4)$

$$\Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) \leq x^4 + y^4 \Leftrightarrow (x-y)^2 \left[ \left( \frac{x+y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} \right] \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Khi đó áp dụng (\*), ta được:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} &= \left[ \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \right] \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \\ &\leq \frac{a^4+b^4}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

**Ví dụ 4:** Cho  $a, b, c \in (0, 1)$ , chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:  $a(1-b) > \frac{1}{4}$ ,  $b(1-c) > \frac{1}{4}$ ,  $c(1-a) > \frac{1}{4}$ .

*Giải*

Giả sử trái lại cả ba bất đẳng thức đều đúng, khi đó nhân theo vế ba bất đẳng thức ta được:

$$a(1-b) \cdot b(1-c) \cdot c(1-a) > \frac{1}{64} \Leftrightarrow a(1-a) \cdot b(1-b) \cdot c(1-c) > \frac{1}{64}. \quad (*)$$

$$\text{Ta có nhận xét: } a(1-a) = a - a^2 = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

$$\text{Chứng minh tương tự, ta có: } b(1-b) \leq \frac{1}{4}, c(1-c) \leq \frac{1}{4},$$

$$\text{do đó: } a(1-a) \cdot b(1-b) \cdot c(1-c) \leq \frac{1}{64} \text{ tức là } (*) \text{ sai.}$$

**Ví dụ 5:** Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với  $a$  là cạnh huyền. Chứng minh rằng:  $a^3 > b^3 + c^3$ .

*Giải*

Vì  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với  $a$  là cạnh huyền nên  $a > b$  và  $a > c$ .

Theo định lý Pitago, ta có:  $a^2 = b^2 + c^2$ .

$$\text{Ta có nhận xét: } a^3 = a^2 \cdot a = (b^2 + c^2) \cdot a = b^2 \cdot a + c^2 \cdot a \underset{a>c}{\overset{a>b}{>}} b^2 \cdot b + c^2 \cdot c = b^3 + c^3, \text{ đpcm.}$$

**Chú ý:**

Ở đây, ta còn có kết quả tổng quát hơn:

" Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với  $a$  là cạnh huyền ta luôn có:  $a^n \geq b^n + c^n$ , với  $n \in \mathbb{N}$  và  $n \geq 2$  "

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Trình các phương pháp chứng minh bất đẳng thức.

#### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Xác định tính đúng, sai của các bất đẳng thức sau và nêu lời giải thích:

- a.  $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ , với  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .
- b.  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > a(b + c + d)$ , với  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ .
- c.  $a^4 + b^4 < ab(a^2 + b^2)$ , với  $a, b \in \mathbf{R}$ .
- d.  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ , với  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

**Bài tập 2.** Với  $0 \leq x, y, z \leq 1$ , chứng minh rằng:

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3.$$

**Bài tập 3.** Cho ba số  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c \leq 1$ . Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

#### V. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 1:**

- a. Bất đẳng thức là đúng với mọi số thực  $a, b, c$  bởi:

$$\text{bđt} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(ab - bc)^2 + \frac{1}{2}(bc - ca)^2 + \frac{1}{2}(ca - ab)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

- b. Bất đẳng thức là đúng với mọi số thực  $a, b, c, d$  bởi:

$$\text{bđt} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

- c. Bất đẳng thức là sai bởi với  $a = b = 0$ , ta được  $0 < 0$ .

d. Bất đẳng thức là đúng bởi: 
$$\begin{cases} |a - b| < c \\ |b - c| < a \\ |c - a| < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)^2 < c^2 \\ (b - c)^2 < a^2 \\ (c - a)^2 < b^2 \end{cases},$$

cộng theo vế ta được đpcm.



# Bài toán **BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN DẤU GIÁ**

## **2** **TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ ỨNG DỤNG**

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. ĐỊNH NGHĨA

Giá trị tuyệt đối của số thực  $a$  là:  $|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$

#### 2. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

*Tính chất 1:* Với mọi số thực  $a$  ta có:  $\sqrt{a^2} = |a|$

*Tính chất 2:* Với hai số thực  $a, b$  tùy ý:  $a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|$ .

*Tính chất 3:* Ta có:  $-b \leq a \leq b \Leftrightarrow |a| \leq b$ .

*Tính chất 4:* Ta có:  $\begin{cases} a \geq b \\ a \geq -b \end{cases} \Leftrightarrow a \geq |b|$ .

*Tính chất 5:* Ta có:  $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ .

### II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Bài toán liên quan tới bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối thường được sử dụng cho các dạng toán:

*Dạng 1:* Chứng minh bất đẳng thức.

*Dạng 2:* Giải phương trình.

#### 1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng với mọi số thực  $a, b$  ta luôn có:  $|a \pm b| \geq |a| - |b|$ .

*Giải*

Ta có:  $|a| = |(a \pm b) \mp b| \leq |a \pm b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a \pm b|$ .

**Ví dụ 2:** Chứng minh rằng với mọi số thực  $a, b, c$  ta luôn có:

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|.$$

*Giải*

Ta có:  $a - c = (a - b) + (b - c)$ . Kết quả suy ra từ tính chất 5.

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng nếu:  $|a| + |b| = a + b$ , (1)

thì  $a, b \geq 0$ .

*Giải*

Vế trái không âm, vậy vế phải không âm, tức là  $a + b \geq 0$ .

Suy ra, trong hai số  $a, b$  phải có một số không âm, giả sử  $a \geq 0$  suy ra:  $|a| = a$ .

Từ đó (1) có dạng:  $|b| = b \Leftrightarrow b \geq 0$ .

## 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Với phương trình ta sử dụng các tính chất:

*Tính chất 1.* Nếu:  $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$ .

*Tính chất 2.* Nếu:  $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ .

*Tính chất 3.* Nếu:  $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ .

*Tính chất 4.* Nếu:  $|a - b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) \geq 0$ .

**Ví dụ 1:** Giải phương trình:  $|2x + 3| + |1 - 2x| = 4$ .

*Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng:  $|2x + 3| + |1 - 2x| = (2x + 3) + (1 - 2x)$ .

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 1}} \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là  $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

**Chú ý:**

Các phương trình được giải bằng phương pháp *sử dụng các tính chất giá trị tuyệt đối* ở dạng ban đầu thường không thấy xuất hiện dấu trị tuyệt đối, nó thường xuất hiện sau phép biến đổi:  $\sqrt{A^2} = |A|$ .

**Ví dụ 2:** Giải phương trình:  $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2$ . (1)

*Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow |x+1| - |x-1| = |(x+1) - (x-1)|$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 4}} (x-1) \cdot [(x+1) - (x-1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot 2 \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là  $x \geq 1$ .

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu định nghĩa giá trị tuyệt đối của số thực a.

**Câu hỏi 2:** Nêu các tính chất cơ bản của bất đẳng thức chứa dấu trị tuyệt đối.

**Câu hỏi 3:** Nêu các bất đẳng thức mở rộng được sử dụng để giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Biết rằng  $|a| > 2|b|$ . Chứng minh rằng:  $|a| < 2|a - b|$ .

**Bài tập 2.** Biết với  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

a.  $\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a} \right| < 1$ .

b.  $\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{8}$ .

**Bài tập 3.** Giải các phương trình sau:

a.  $|x + 3| + |1 - x| = 4$ .

b.  $|3x - 1| + |2 - 3x| = 3$ .

**Bài tập 4.** Giải các phương trình sau:

a.  $|2x - 3| + |2x - 9| = 6$ .

b.  $|4x - 1| + 2|2x - 1| = 1$ .

### Bài toán

### 3

## BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI VÀ CÁC ỨNG DỤNG

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta phát biểu bất đẳng thức:

**Bất đẳng thức Côsi:** Cho hai số không âm  $a, b$ , ta luôn có:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ,  
dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

**Mở rộng**

a. Với các số  $a, b, c$  không âm, ta luôn có:  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ ,

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

b. Với  $n$  số  $a_i, i = \overline{1, n}$  không âm, ta luôn có:

$$\frac{1}{n} (\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{n \text{ số hạng}}) \geq \sqrt[n]{\underbrace{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}_{n \text{ số hạng}}}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

### II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Bất đẳng thức Côsi thường được sử dụng cho các dạng toán:

**Dạng 3:** Chứng minh bất đẳng thức.

**Dạng 4:** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số hoặc biểu thức.

**Dạng 5:** Giải phương trình.

## I. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 1:** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ .

*Giải*

Sử dụng bất đẳng thức Côsi:

▪ Cho cặp số  $a, b$ , ta được:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ . (1)

▪ Cho cặp số  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ , ta được:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$ . (2)

Nhân hai vế tương ứng của (1), (2), ta được:

$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}} = 4, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:  $\begin{cases} a = b \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow a = b$ .

**Nhân xét:**

Chúng ta có được kết quả tổng quát hơn như sau:

Cho  $n$  số dương  $a_i, i = \overline{1, n}$ . Chứng minh rằng:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Thật vậy, ta có:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ ,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

Nhân hai vế tương ứng, ta được bất đẳng thức cần chứng minh và dấu đẳng thức xảy ra khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Ví dụ 2:** Cho ba số dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

*Giải*

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3 \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\ &= \frac{1}{2} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot 3 \frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi: 
$$\begin{cases} a+b=b+c=c+a \\ \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} = \frac{1}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

**Chú ý:** Trong nhiều trường hợp ta cần sử dụng một vài phép biến đổi đại số để nhận được các phân tử không âm trong bất đẳng thức, từ đó mới có thể sử dụng bất đẳng thức Côsi. Để minh họa ta xét ví dụ sau:

**Ví dụ 3:** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:  

$$ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ca(c+a-2b) \geq 0.$$

*Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng: 
$$\frac{a+b-2c}{c} + \frac{b+c-2a}{a} + \frac{c+a-2b}{b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \geq 6. \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho VT, ta được:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \geq 6. \quad \sqrt[6]{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b}} = 6, \text{ dpcm.}$$

dấu bằng xảy ra khi:  $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a=b=c.$

**Chú ý:** Trong nhiều trường hợp ta cần sử dụng liên tiếp nhiều lần bất đẳng thức Côsi. Để minh họa ta xét ví dụ sau:

**Ví dụ 4:** Cho  $a, b > 0, m \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh rằng:  $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}$

*Giải*

Ta có:  $1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right)^m \geq 2^m \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m},$

$$1 + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geq 2^m \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m},$$

suy ra: 
$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m &\geq 2^m \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m} + 2^m \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m} \\ &\geq 2 \cdot \sqrt{2^m \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \cdot 2^m \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m}} = 2^{m+1}, \end{aligned}$$

$$\text{dấu đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} 1 = \frac{a}{b} \\ 1 = \frac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b.$$

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m$$

**Chú ý:** Với các bất đẳng thức có điều kiện cần khéo léo biến đổi để tận dụng được điều kiện của giả thiết.

## 2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

**Ví dụ 1:** Cho hai số  $a, b \geq 0$ .

- Nếu  $a + b = k - \text{const}$ , tính giá trị lớn nhất của  $ab$ .
- Nếu  $ab = k - \text{const}$ , tính giá trị nhỏ nhất của  $a + b$ .

**Giải**

a. Theo bất đẳng thức Cossi ta có:  $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}$ ,

từ đó suy ra  $(ab)_{\text{Max}} = \frac{k^2}{4}$ , đạt được khi  $a = b = \frac{k}{2}$ .

**Nhân xét:** Qua ví dụ trên chúng ta thấy rằng:

- Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông là hình có diện tích lớn nhất.
- Trong số các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông là hình có chu vi nhỏ nhất.

b. Theo bất đẳng thức Cossi ta có:  $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{k}$ ,

từ đó suy ra  $(a + b)_{\text{Min}} = 2\sqrt{k}$ , đạt được khi  $a = b = \frac{k}{2}$ .

**Ví dụ 2:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:  $y = \frac{x}{3} + \frac{15}{x}$ , với  $x > 0$ .

**Giải**

Với  $x > 0$ , ta được  $\frac{x}{3}, \frac{15}{x} > 0$

Sử dụng bất đẳng thức Cossi ta được:  $y = \frac{x}{3} + \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{12}{x}} = 4$ ,

từ đó suy ra  $y_{\text{Min}} = 4$ , đạt được khi:  $\frac{x}{3} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow x^2 = 36 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 6$ .

**Chú ý:** Ví dụ trên đã minh họa phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị nhỏ nhất của một tổng có tích bằng hằng số, tuy nhiên trong hầu hết các trường hợp các em học sinh cần có được thủ thuật để tạo ra một tích bằng hằng số, ví dụ như:

1. Với  $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ , với  $x > 0$ , ta cần viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x + x + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{x \cdot x \cdot \frac{1}{x^2}} = 3.$$

2. Trong trường hợp là tổng lũy thừa, ta minh họa bằng ví dụ sau:

**Ví dụ 3:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:  $y = x^3 + \frac{3}{x^2}$ , với  $x > 0$ .

**Giải:**

$$\text{Biến đổi: } y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{2}x^3 \cdot \frac{1}{2}x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{5}{\sqrt[5]{4}},$$

từ đó, suy ra  $y_{\min} = \frac{5}{\sqrt[5]{4}}$ , đạt được khi

$$\frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^5 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2}.$$

**Ví dụ 4:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:  $y = (x+2)(3-x)$ , với  $-2 \leq x \leq 3$ .

**Giải**

Với  $-2 \leq x \leq 3$ , ta được:  $x+2 \geq 0$  và  $3-x \geq 0$ ,  
do đó sử dụng bất đẳng thức Cosi ta được:

$$y = (x+2)(3-x) \leq \left[ \frac{(x+2) + (3-x)}{2} \right]^2 = \frac{25}{4},$$

từ đó suy ra  $y_{\max} = \frac{25}{4}$ , đạt được khi:  $x+2 = 3-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

**Chú ý:** Ví dụ trên đã minh họa phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị lớn nhất của một tích có tổng bằng hằng số, tuy nhiên trong hầu hết các trường hợp các em học sinh cần có được thủ thuật để tạo ra một tổng bằng hằng số, ví dụ như:

1. Với  $y = (2x+1)(2-3x)$ , với  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ , ta cần viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (2x + 1)(2 - 3x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} - x\right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3} - x\right) \leq \frac{1}{6} \left[ \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - x\right)}{2} \right]^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2$$

2. Trong trường hợp là tích lũy thừa, ta minh họa bằng ví dụ sau:

**Ví dụ 5:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:  $y = x(1 - x)^3$ , với  $0 \leq x \leq 1$ .

*Giải*

$$\text{Biến đổi: } y = x(1 - x)^3 = \frac{1}{3} \cdot 3x(1 - x)^3 = \frac{1}{3} \cdot 3x(1 - x)(1 - x)(1 - x),$$

rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số không âm gồm  $3x$  và 3 số  $1 - x$ ,

$$\text{ta được: } y \leq \frac{1}{3} \cdot \left[ \frac{3x + (1 - x) + (1 - x) + (1 - x)}{4} \right]^4 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4},$$

$$\text{dấu đẳng thức xảy ra khi: } 3x = 1 - x = 1 - x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

### 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

**Ví dụ 1:** Giải phương trình:  $\frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} = 2$ . (1)

*Giải*

Điều kiện  $x \neq -1$ .

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$VT = \frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{|x+1|} \cdot \frac{|x+1|}{3}} = 2 = VP.$$

Vậy phương trình tương đương với :

$$\frac{3}{|x+1|} = \frac{|x+1|}{3} \Leftrightarrow 9 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm  $x = 2$  và  $x = -4$ .

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm  $a$  và  $b$ .

**Câu hỏi 2:** Nêu các ứng dụng của bất đẳng thức Côsi.



#### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** \*Chứng tỏ rằng trong mọi tam giác, ta đều có:  $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ .

trong đó  $S$  là diện tích tam giác,  $2p$  là chu vi tam giác.

**Bài tập 2.** \*Chứng minh rằng:  $4\sqrt[4]{(a+1)(b+4)(c-2)(d-3)} \leq a+b+c+d$ ,

với  $a \geq -1, b \geq -4, c \geq 2$  và  $d > 3$

**Bài tập 3.** \*Chứng minh rằng:  $x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ , với  $x, y > 0$ .

**Bài tập 4.** \*Chứng minh rằng:  $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$ , với  $a, b \geq 1$ .

**Bài tập 5.** \*Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1,$$

với  $0 \leq a, b, c \leq 1$ .

**Bài tập 6.** \*Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z},$$

với  $x, y, z \geq 0$  và  $x, y, z \leq 3$ .

**Bài tập 7.** \*Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5} \geq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$ ,

với  $a, b, c, d > 0$ .

**Bài tập 8.** \*Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ac} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{a+b+c}{2abc}$ ,

với  $a, b, c > 0$ .

**Bài tập 9.** \*Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{a^3+c^3+abc} \leq \frac{1}{abc},$$

với  $a, b, c > 0$ .

**Bài tập 10.** \*Chứng minh rằng:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{18}{xyz+2}$ ,

với  $x, y, z > 0$  có  $x+y+z=1$ .

**Bài tập 11.**

1. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 4, hãy chỉ ra hình có diện tích lớn nhất.

2. Trong các hình chữ nhật có diện tích bằng 3, hãy chỉ ra hình có chu vi nhỏ nhất.

**Bài tập 12.** \*Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:  $y = (x + 3)(7 - x)$ , với  $-3 \leq x \leq 7$ .

**Bài tập 13.** \*Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:  $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}$ , với  $x > 0$ .

**Bài tập 14.** \*Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:  $y = x^2 + \frac{2}{x^3}$ , với  $x > 0$ .

**Bài tập 15.** \*Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:  $y = x^3(2 - x)^4$ , với  $0 \leq x \leq 2$ .

## V. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 1:** Gọi  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của tam giác, thế thì:  $a + b + c = 2p$  và nhớ rằng  $p - a, p - b, p - c$  là ba số dương.

Theo công thức Hérông

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) \leq p \cdot \left( \frac{(p - a) + (p - b) + (p - c)}{3} \right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

$$\Leftrightarrow S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:  $p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$  tam giác đều.

**Bài tập 12:**  $y_{\max} = 25$ , đạt được khi  $x = 2$ .

**Bài tập 13:**  $y_{\min} = 6$ , đạt được khi  $x = 6$ .

**Bài tập 14:**  $y_{\min} = \frac{5}{\sqrt[3]{27}}$ , đạt được khi  $x = \sqrt[3]{3}$ .

**Bài tập 15:**  $y_{\max} = \frac{3^3 \cdot 5^5}{4^8}$ , đạt được khi  $x = \frac{3}{4}$ .

## Bài toán

### 4

## BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXS KI VÀ CÁC ỨNG DỤNG

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

**Bất đẳng thức Bunhiacôpxki:** Cho  $a_1, a_2, b_1, b_2$  là những số thực, ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ .

**Mở rộng:** Với các số thực  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ , ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Bất đẳng thức Bunhiacôpxki thường được sử dụng cho các dạng toán:

*Dạng 1:* Chứng minh bất đẳng thức.

*Dạng 2:* Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số hoặc biểu thức.

*Dạng 3:* Giải phương trình.

### 1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng với mọi số thực  $x, y$  luôn có:

$$(x^3 + y^3)^2 \leq (x^2 + y^2)(x^4 + y^4).$$

*Giải*

Ta có: VT =  $(x^3 + y^3)^2 = (x \cdot x^2 + y \cdot y^2)^2 \leq (x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$ , đpcm.

**Ví dụ 2:** Chứng minh rằng với  $a, b, c$  tùy ý, ta luôn có:  $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ .

*Giải*

Ta có: VT<sup>2</sup> =  $(ab + bc + ca)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$ .

Lấy căn bậc hai của hai vế, ta đi đến:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq ab + bc + ca, \text{ đpcm.}$$

**Ví dụ 3:** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác,  $p$  là một nửa chu vi.

Chứng minh rằng:  $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$ .

*Giải*

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có: } (\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})^2 &= (1 \cdot \sqrt{p-a} + 1 \cdot \sqrt{p-b} + 1 \cdot \sqrt{p-c})^2 \\ &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(p-a + p-b + p-c) = 3p \\ \Leftrightarrow \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} &\leq \sqrt{3p} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi: } \frac{\sqrt{p-a}}{1} = \frac{\sqrt{p-b}}{1} = \frac{\sqrt{p-c}}{1} \Leftrightarrow a = b = c.$$

$$\blacksquare \text{ Ta đi chứng minh: } \sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$$

bằng phép biến đổi tương đương, cụ thể:  $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$

$$\Leftrightarrow p < p-a + p-b + p-c +$$

$$+ 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}.$$

**Ví dụ 4:** Cho  $a, b, c$  là ba số khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

*Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right)^2$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right). \quad (*)$$

$$\text{Nhận xét rằng: } \frac{1}{3} \cdot \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right) \geq \sqrt[3]{\left|\frac{abc}{abc}\right|} = 1,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a},$$

$$\text{suy ra: } \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\text{từ đó (*) được biến đổi: } \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Dễ nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c$ .

**Chú ý:** Với các bài toán có điều kiện ta cần khéo léo biến đổi để nhận được biểu thức điều kiện hoặc sử dụng ngay biểu thức điều kiện để biến đổi. Cụ thể ta đi xem xét các ví dụ sau:

**Ví dụ 5:** Hai số  $x, y$  thoả mãn  $x^2 + y^2 = 1$ . Chứng minh rằng:  $-5 \leq 3x + 4y \leq 5$ .

*Giải*

$$\text{Ta có: } (3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 25.$$

$$\text{Lấy căn hai vế, ta được: } |3x + 4y| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 3x + 4y \leq 5, \text{ đpcm.}$$

**Ví dụ 6:** Cho các số không âm  $x, y$  thoả mãn  $x^3 + y^3 = 2$ . Chứng minh rằng:  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

*Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$(x^2 + y^2)^2 = \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{y^3}\right)^2 \leq (x + y)(x^3 + y^3) = 2(x + y)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^4 \leq 4(x + y)^2 = 4(1.x + 1.y)^2 \leq 4(1 + 1)(x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^3 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2, \text{ đpcm.}$$

Để nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra khi  $x = y = 1$ .

## 2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

**Ví dụ 1:** Trong tất cả các nghiệm  $(x, y)$  của phương trình:  $2x + 3y = 1$  (\*)  
hãy chỉ ra nghiệm có tổng  $3x^2 + 2y^2$  có nghiệm nhỏ nhất.

*Giải*

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 1 &= (2x + 3y)^2 = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot x + \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot y + \sqrt{2} \right)^2 \\ &\leq \left( \frac{4}{3} + \frac{9}{2} \right) (3x^2 + 2y^2) = \frac{35}{6} (3x^2 + 2y^2) \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 \geq \frac{6}{35} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ta có:

$$x\sqrt{3} : \frac{2}{\sqrt{3}} = y\sqrt{2} : \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \frac{3x}{2} = \frac{2y}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{35} \text{ \& } y = \frac{9}{35}.$$

$$\text{Vậy } (3x^2 + 2y^2)_{\min} = \frac{6}{35} \text{ đạt được khi } x = \frac{4}{35} \text{ và } y = \frac{9}{35}.$$

## 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

**Ví dụ 1:** Giải phương trình:  $2x^4 + (1 - 2x)^4 = \frac{1}{27}$ . (1)

*Giải*

$$\text{Biến đổi vế trái của phương trình: } 2x^4 + (1 - 2x)^4 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot [2x^4 + (1 - 2x)^4]$$

$$= \frac{1}{3} (1^2 + 1^2 + 1^2) [x^4 + x^4 + (1 - 2x)^4] \geq \frac{1}{3} [x^2 + x^2 + (1 - 2x)^2]^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \{3 \cdot [x^2 + x^2 + (1 - 2x)^2]\}^2$$

$$= \frac{1}{27} \{(1^2 + 1^2 + 1^2) [x^2 + x^2 + (1 - 2x)^2]\}^2 \geq \frac{1}{27} [x + x + (1 - 2x)]^4 = \frac{1}{27}.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x^2 = (1 - 2x)^2 \\ x = x = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Vậy phương trình có nghiệm } x = \frac{1}{3}.$$

### III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Chứng minh rằng nếu  $x^2 + y^2 = 1$ , thì :  $-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$ .

**Bài tập 2.** Chứng minh rằng nếu  $x + 3y = 2$ , thì:  $x^2 + y^2 \geq \frac{5}{2}$ .

**Bài tập 3.** Chứng minh rằng nếu  $2x + 3y = 7$ , thì :  $2x^2 + 3y^2 \geq \frac{49}{5}$ .

**Bài tập 4.** Cho  $a, b, c, p, q$  là 5 số dương tùy ý. Chứng minh:

$$\frac{a}{pb + qc} + \frac{b}{pc + qa} + \frac{c}{pa + qb} \geq \frac{3}{p + q}.$$

**Bài tập 5.** Cho  $a, b, c$  là ba số dương cho trước, còn  $x, y, z$  là ba số dương thay đổi, luôn luôn thoả mãn điều kiện:  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng  $S = x + y + z$ .

### IV. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 4:** Ký hiệu bất đẳng thức cần chứng minh là (1)

$$\text{Để ý rằng: } a = \sqrt{\frac{a}{pb + qc}} \cdot \sqrt{a(pb + qc)},$$

$$b = \sqrt{\frac{b}{pc + qa}} \cdot \sqrt{b(pc + qa)}, \quad c = \sqrt{\frac{c}{pa + qb}} \cdot \sqrt{c(pa + qb)}$$

Gọi  $S$  là vế trái của bất đẳng thức (1).

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (a + b + c)^2 &= \left( \sqrt{\frac{a}{pb + qc}} \cdot \sqrt{a(pb + qc)} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{b}{pc + qa}} \cdot \sqrt{b(pc + qa)} + \sqrt{\frac{c}{pa + qb}} \cdot \sqrt{c(pa + qb)} \right)^2 \\ &\leq S \cdot [a(pb + qc) + b(pc + qa) + c(pa + qb)] \\ &= S(p + q)(ab + bc + ca). \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác: } ab + bc + ca \leq \frac{1}{3} (a + b + c)^2,$$

$$\begin{aligned} \text{bởi: } 3(ab + bc + ca) &= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Với kết quả đó từ (2) ta suy ra: } (a + b + c)^2 \leq S(p + q) \cdot \frac{(a + b + c)^2}{3}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{3}{p+q}, \text{ vì } a+b+c > 0, p+q > 0.$$

**Bài tập 5 :** Ta có:  $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{a}{x}} \cdot \sqrt{x}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Vậy ta được: } (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 &= \left( \sqrt{\frac{a}{x}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{\frac{b}{y}} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{\frac{c}{z}} \cdot \sqrt{z} \right)^2 \\ &\leq \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) (x + y + z) = S. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\sqrt{x} : \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{y} : \sqrt{\frac{b}{y}} = \sqrt{z} : \sqrt{\frac{c}{z}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \\ \frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{y}{\sqrt{b}} = \frac{z}{\sqrt{c}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}; y = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}; z = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\text{Vậy Min}(x + y + z) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$$

## ÔN TẬP CHƯƠNG II

**Bài tập 1.** Chứng minh rằng:

a.  $5a - 3 > 5b + 8$  với  $a > b$ .

b.  $7 - 2a < 2 - 2b$  với  $a > b$ .

**Bài tập 2.** Chứng minh rằng:

a.  $4a^2 + 9b^2 \geq 12ab$  với  $a, b \in \mathbf{R}$ .

b.  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  nếu  $a > 0, b > 0$ .

c.  $\frac{1}{2}(a+b) \geq 2\sqrt{ab}$  nếu  $a \geq 0, b \geq 0$ .

d.  $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$  với  $a, b \in \mathbf{R}$ .

**Bài tập 3.** Chứng minh rằng:

a.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  với  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

b.  $a^2 + b^2 + ab \geq 0$  với  $a, b \in \mathbf{R}$ . Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài tập 4.** Chứng tỏ rằng 7,99 là nghiệm của bất phương trình:  $x < 8$

Hãy kể ra năm số lớn hơn 7,99 mà cũng là nghiệm của bất phương trình đó.

**Bài tập 5.** Chứng tỏ rằng 5,02 là nghiệm của bất phương trình:  $x > 5$

Hãy kể ra năm số nhỏ hơn 5,02 mà cũng là nghiệm của bất phương trình đó.

**Bài tập 6.** Cho biểu thức:  $A = \frac{x-3}{x+1}$ .

- a. Tìm giá trị của  $x$  để  $A = 2$ .      b. Tìm giá trị của  $x$  để  $A > 1$ .

**Bài tập 7.** Tìm tập xác định của biểu thức, rút gọn biểu thức và tìm giá trị của  $x$  để biểu thức thu gọn có giá trị âm:

$$A = \left( \frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3 \right) : \frac{2-4x}{x+1} + \frac{x^2-3x-1}{3x}.$$

**Bài tập 8.** Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm của chúng trên trục số.

- a.  $2(5x-1) - 8x > 4x + 5$ .      b.  $4x - 9 \geq 2(4x+1) + 5$ .

**Bài tập 9.** Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm của chúng trên trục số.

- a.  $2x + 5,4 < \frac{3x-8}{5}$ .      b.  $2 + \frac{2+4x}{3} > \frac{5x-7}{4} + 8$ .

**Bài tập 10.** Giải phương trình:  $\frac{8x-1}{5x-1} + \frac{7x-3}{3-5x} = \frac{4x}{(1-5x)(5x-3)}$ .

**Bài tập 11.** Giải các bất phương trình:

- a.  $\frac{x-5}{4} - \frac{2x-1}{2} < 3$ .      b.  $\frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2}$ .

Sau đó tìm các giá trị nguyên của  $x$  thoả mãn cả hai bất phương trình trên.

**Bài tập 12.** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{2x+1}{1-2x} - \frac{1-2x}{1+2x} - \frac{16x^2}{4x^2-1} \right) : \frac{16x^3-4x}{4x^2-4x+1}$ .

- a. Rút gọn biểu thức  $A$ .  
b. Tìm giá trị của  $x$  để biểu thức  $A$  có giá trị dương.

**Bài tập 13.** Cho biểu thức:  $A = \frac{1}{x^2-2x+1} - \left( \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^3-x} \right) : \frac{x^2-2x+1}{x+x^3}$ .

- a. Tìm tập xác định của biểu thức  $A$ .  
b. Rút gọn biểu thức  $A$ .  
c. Tính giá trị của biểu thức  $A$  với  $x = 2$ ;  $x = -1$ .  
d. Tìm giá trị của  $x$  để  $A = -1$ .  
e. Chứng minh rằng  $A < 0$  với mọi giá trị của  $x$  thuộc tập xác định của biểu thức.  
f. Tìm giá trị của  $x$  để  $A > -1$ .



**Bài tập 14.** Rút gọn biểu thức rồi tìm giá trị của x để biểu thức rút gọn âm:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - 4(4x - 8)}$$

**Bài tập 15.** Giải phương trình:  $\frac{x+4}{5} - x - 5 = \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$ .

**Bài tập 16.** Tách phần nguyên của biểu thức sau đây và tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức cũng có giá trị nguyên:  $\frac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x - 1}$ .

**Bài tập 17.** Giải các phương trình:

a.  $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$ .

b.  $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$ .

c.  $x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0$ .

d.  $x^2 + 12x + 32 = 0$ .

**Bài tập 18.** Rút gọn rồi chứng minh các biểu thức sau luôn luôn dương với mọi giá trị của biến thuộc tập xác định của biểu thức:

a.  $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}$ .

b.  $\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^2 - 1}$ .

**Bài tập 19.** Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x thuộc tập xác định của biểu thức:

$$\left[ \frac{x^2}{(x+2)^2(x-2)} - \frac{8x}{(x^2-4)^2} + \frac{4}{(x+2)(x-2)^2} \right] \left( \frac{x}{2} + 1 \right)$$

**Bài tập 20.** Giải phương trình:  $\frac{5x^2 - 2}{x + 2} - \frac{5x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{27x}{(x + 2)(x - 1)} - 1$ .

**Bài tập 21.** Cho biểu thức:  $A = \left[ \left( \frac{1}{x^2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{2}{(x+1)^3} \cdot \left( \frac{1}{x} + 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x^3}$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm giá trị của x để  $A = 3$ .

c. Tìm giá trị của x để  $A < 1$ .

d. Tìm giá trị của x để  $A < 0$ .

**Bài tập 22.** Chứng minh hằng đẳng thức:  $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$ .

**Bài tập 23.** Cho hai số x và y có tổng bằng 6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức xy.

**Bài tập 24.** Cho hai số dương x và y có tích bằng 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $x + y$ .

**Bài tập 25.** Cho biết  $x + y = 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a.  $A = x^2 + y^2$ .

b.  $B = x^3 + y^3$ .

**Bài tập 26.** Chứng tỏ rằng, trong một tam giác thì độ dài một cạnh luôn nhỏ hơn nửa chu vi.

**Bài tập 27.** Chứng minh rằng:

a.  $(m + 1)^2 \geq 4m$ .

b.  $m^2 + n^2 + 2 \geq 2(m + n)$ .

**Bài tập 28.** Cho  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Chứng minh rằng:  $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

**Bài tập 29.** Chứng tỏ diện tích hình vuông cạnh lớn hơn 10m không nhỏ hơn hình chữ nhật có cùng chu vi.

**Bài tập 30.** Giải các bất phương trình:

a.  $5(x - 3)(x + 3) < 5x^2 + 2x$ .

b.  $(4x + 5)(2x - 7) > 10x^2 + 8x + 7$ .

**Bài tập 31.** Giải các bất phương trình:

a.  $\frac{3x^2 - 7x}{5} + \frac{5x + 1}{4} < \frac{x(3x - 1)}{2}$ .

b.  $\frac{3x - 21}{4} - \frac{3x^2 + x}{3} > \frac{x(1 - 2x)}{2} - \frac{4x}{5}$ .

**Bài tập 32.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{3x - 2}{35} + \frac{x(x - 5)}{5}$  và  $B = \frac{3x - 2}{35} + \frac{x(x - 5)}{5}$

a. Với giá trị nào của  $x$  thì giá trị của biểu thức A không lớn hơn giá trị biểu thức B?

b. Với giá trị nào của  $x$  thì giá trị của biểu thức A không nhỏ hơn giá trị biểu thức B?

**Bài tập 33.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{6x - 1}{18} + \frac{x + 3}{12}$  và  $B = \frac{3x - 2}{9} + \frac{2x - 5}{6}$

a. Với giá trị nào của  $x$  thì giá trị của biểu thức A không lớn hơn giá trị biểu thức B?

b. Với giá trị nào của  $x$  thì giá trị của biểu thức A không nhỏ hơn giá trị biểu thức B?

**Bài tập 34.** Tìm  $x$  sao cho:

a.  $-(2 - x)^2 < 0$ .

b.  $x(x - 1)(x - 2) < 0$ .

**Bài tập 35.** Tìm  $x$  sao cho:

a.  $(2 - x)^2 > 0$ .

b.  $(x - 4)(x - 5) > 0$ .

**Bài tập 36.** Tìm  $x$  sao cho:

a.  $\frac{x - 1}{x - 2} > 0$ .

b.  $\frac{x + 3}{x + 4} < 0$ .

**Bài tập 37.** Giải bất phương trình:

a.  $(x - 4)(x - 5) > (x + 2)(x + 8)$ .

b.  $(x - 2)(x + 2) - (1 - 3x)(x + 4) > 4x(x - 1)$ .

c.  $x - \frac{2x - 1}{4} \geq 1$ .

d.  $x - \frac{x - 1}{3} - \frac{x + 5}{4} > 5$ .

**Bài tập 38.** Với giá trị nào của  $x$  thì:

a.  $(25 - x)(x - 52) > 0$ .

b.  $\frac{x-1}{25-x} < 0$ .

c.  $\frac{12x-1}{x+31} > 0$

**Bài tập 39.** Chứng tỏ rằng các phương trình sau vô nghiệm:

a.  $|5x + 9| = 5x + 2$ .

b.  $|8x - 3| = 8x - 8$ .

**Bài tập 40.** Giải các phương trình:

a.  $|3x| = 5x - 6$ .

b.  $|x + 18| = 7x - 9$ .

c.  $| -33x | = 25x + 10$ .

d.  $|4 - 7x| = x - 16$ .

**Bài tập 41.** Giải các phương trình sau:

a.  $|5x + 2| = 13$ .

b.  $|8x - 7| = 9$ .

c.  $|15 - 3x| + 2 = 23$ .

**Bài tập 42.** Giải các phương trình sau:

a.  $|3x + 13| = |x - 2|$ .

b.  $|5x - 18| = |7 - x|$ .

c.  $|23 - 7x| = |x|$ .

**Bài tập 43.** Một người đi bộ một quãng đường dài 18km trong khoảng thời gian không nhiều hơn 4 giờ. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 5km/h, về sau đi với vận tốc 4km/h. Xác định độ dài quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5km/h.

**Bài tập 44.** Hai công nhân được giao làm một số sản phẩm, người thứ nhất làm nhiều hơn người thứ hai là 30 chiếc. Người thứ nhất làm trong 15 ngày, người thứ hai làm trong 12 ngày. Biết rằng mỗi ngày người thứ nhất làm ít hơn người thứ hai là 3 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi người làm trong một ngày.

**Bài tập 45.** Hai đội công nhân đặt dây điện trên một đoạn đường. Nếu họ cùng làm thì sau 4 ngày xong việc. Nhưng khi thực hiện, đội II phải làm một việc khác. Đội I là một mình được 9 ngày thì đội II trở lại. Họ cùng làm 1 ngày nữa thì xong việc. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong việc?

**Bài tập 46.** Một tổ sản xuất phải làm một số dụng cụ trong 18 ngày. Do đã vượt mức mỗi ngày 5 chiếc nên sau 16 ngày tổ đã làm xong số dụng cụ được giao và còn làm thêm 20 dụng cụ nữa. Tính số dụng cụ tổ sản xuất đó được giao.

**Bài tập 47.** Hai đội công nhân làm nghiệp trồng được tất cả 410 cây, trong đó đội I làm trong 4 giờ, đội II làm trong 5 giờ. Biết rằng nếu đội I làm trong 5 giờ, đội II làm trong 4 giờ thì số cây hai đội trồng được bằng nhau. Tính xem mỗi giờ mỗi đội trồng được bao nhiêu cây?

**Bài tập 48.** Giải các bất phương trình rồi biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

a.  $|6x + 1| < 15$ .

b.  $|x - 14| > 5$ .

c.  $|2x - 3| \geq 17$ .

d.  $|4 - 7x| \leq 25$ .

# **P**hần 2

---

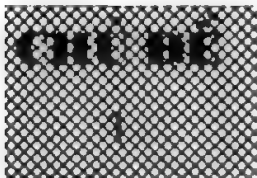
---

## **Hình học**

## **CHƯƠNG I - TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG**

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được khái niệm về sự đồng dạng của hai tam giác, cụ thể:

- 1. Định lý Ta - lét trong tam giác**
- 2. Tính chất đường phân giác của tam giác**
- 3. Hai tam giác đồng dạng**



## ĐỊNH LÝ TA - LÉT TRONG TAM GIÁC

### Kiến thức cơ bản

#### Tỉ số của hai đoạn thẳng

**Định nghĩa:** Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

#### hí dụ 1:

Với  $AB = 6\text{cm}$  và  $CD = 8\text{cm}$  thì ta có tỉ số của nó:  $\frac{AB}{CD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ .

Với  $AB = 2\text{cm}$  và  $CD = 1\text{dm}$  thì ta có tỉ số của nó:  $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ .



1. Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo.
2. Dựa vào tỉ số của hai đoạn thẳng chúng ta có thể tính được độ dài của đoạn thẳng, thí dụ sau minh hoạ điều này.

#### hí dụ 2:

Cho đoạn thẳng  $AB = 5\text{cm}$ . Trên đường thẳng  $AB$  lấy các điểm  $C, D$  sao cho  $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{1}{2}$  ( $C$  nằm trong đoạn thẳng  $AB$ ,  $D$  nằm ngoài đoạn thẳng  $AB$ ). Tính độ dài các đoạn thẳng  $CA, DA$ .

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

ách 1: Ta có:



$$\frac{CA}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CA}{CA + CB} = \frac{1}{1 + 2} \Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CA}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow CA = 5\text{cm}.$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DA}{DB - DA} = \frac{1}{2 - 1} \Rightarrow \frac{DA}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{DA}{5} = 1 \Rightarrow DA = 5\text{cm}.$$

ách 2: Ta có:  $\frac{CA}{1} = \frac{CB}{2} = \frac{CA + CB}{1 + 2} = \frac{AB}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow CA = 5\text{cm}.$

$$\frac{DA}{1} = \frac{DB}{2} = \frac{DB - DA}{2 - 1} = \frac{AB}{1} = 5 \Rightarrow DA = 5\text{cm}.$$

### ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ

#### hí dụ 3:

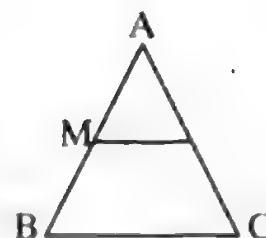
Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB, AC$ . Hãy tính

các tỉ số  $\frac{AM}{AB}$  và  $\frac{AN}{AC}$ .

**Giải**

Với giả thiết:

- M là trung điểm của AB, ta được:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AM}{2AM} = \frac{1}{2}$ .
- N là trung điểm của AC, ta được:  $\frac{AN}{AC} = \frac{AN}{2AN} = \frac{1}{2}$ .



**Nhận xét:**

Theo kết quả trên, ta có:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

khi đó, người ta nói "hai đoạn thẳng AM và AN tỉ lệ với hai đoạn thẳng AB và AC".

Từ đó, ta có định nghĩa:

**Định nghĩa:** Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng

$A_1B_1$  và  $C_1D_1$  nếu có hệ thức:  $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$  hoặc  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$ .

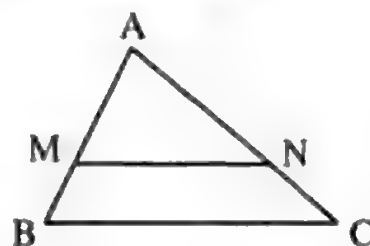
### 3. ĐỊNH LÝ TA – LÉT TRONG TAM GIÁC

Nội dung của định lý Ta – lét như sau:

**Định lý Ta – lét:** Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Như vậy, trong  $\triangle ABC$  nếu MN song song với BC, ta nhận được:

$$\begin{aligned}\frac{AM}{MB} &= \frac{AN}{NC}, \\ \frac{AM}{AB} &= \frac{AN}{AC}, \\ \frac{BM}{AB} &= \frac{CN}{AC}.\end{aligned}$$



**Thí dụ 4:** Tính các độ dài x, y và z trong hình vẽ, biết  $BC = 12\text{cm}$ .

**Giải**

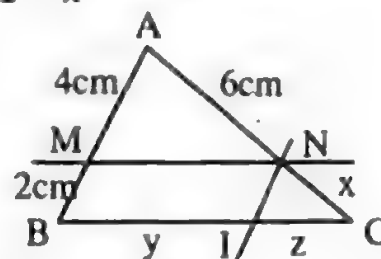
Với MN song song với BC, ta có:  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow \frac{4}{2} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = 3\text{cm}$ .

Với NI song song với AB, ta có:

$$\frac{CN}{CA} = \frac{CI}{CB} \Leftrightarrow \frac{3}{9} = \frac{z}{12} \Leftrightarrow z = 4\text{cm}.$$

Ta có:  $BC = BI + CI \Leftrightarrow 12 = y + 4 \Leftrightarrow y = 8\text{cm}$ .

Vậy, ta nhận được  $x = 3\text{cm}$ ,  $y = 8\text{cm}$  và  $z = 4\text{cm}$ .



**Nhận xét:**

1. Trước hết ta có nhận xét:  $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = \frac{2}{6} + \frac{8}{12} = 1$

từ đó, ta có thể nêu một bài toán:

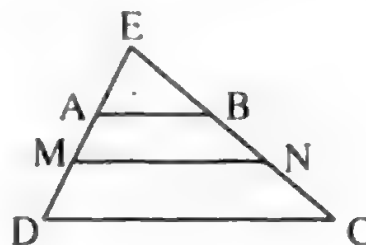
"Cho  $\triangle ABC$ . Từ điểm  $N$  trên  $AC$  kẻ các đường thẳng song song với các cạnh  $BC$  và  $AB$ , chúng cắt các cạnh  $AB$  và  $BC$  theo thứ tự tại  $M$  và  $I$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = 1$ ."

2. Kết luận của định lý Ta - let vẫn đúng trong hình thang, cụ thể:

"Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$  và  $AB < CD$ . Đường thẳng song song với  $AB$  cắt các cạnh bên  $AD$ ,  $BC$  theo thứ tự tại  $M$ ,  $N$ . Chứng minh rằng:

a.  $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$   
b.  $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$   
c.  $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{BC}$ ."



Thật vậy:

a. Kéo dài  $AD$  và  $BC$ , chúng cắt nhau tại  $E$ , khi đó ta lần lượt xét:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{MA}{AE} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{NB}{BE} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{NB}{BC}.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách:

Cách 1: Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC} &\Leftrightarrow \frac{MA}{AD - MA} = \frac{NB}{BC - NB} \\ &\Leftrightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}. \end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng phép biến đổi như trong câu a), ta có:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MA}{ME} \cdot \frac{ME}{MD} = \frac{NB}{NE} \cdot \frac{NE}{NC} = \frac{NB}{NC}.$$

c. Ta có thể trình bày theo hai cách:

Cách 1: Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} \Leftrightarrow \frac{MA + MD}{MD} = \frac{NB + NC}{NC} \Leftrightarrow \frac{AD}{MD} = \frac{BC}{NC}.$$



Cách 2 Sử dụng phép biến đổi như trong câu a), ta có:

$$\frac{MD}{AD} = \frac{MD}{DE} \cdot \frac{DE}{AD} = \frac{NC}{CE} \cdot \frac{CE}{BC} = \frac{NC}{BC}$$

#### 4. ĐỊNH LÝ TA - LÉT ĐÀO

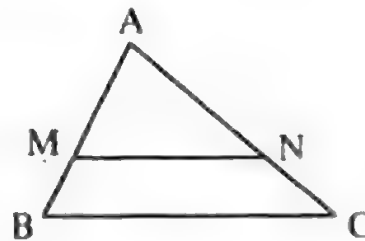
**Định lý Ta - lét đảo:** Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Như vậy, trong  $\triangle ABC$  nếu ta có:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow MN \parallel BC,$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow MN \parallel BC,$$

$$\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC} \Leftrightarrow MN \parallel BC.$$



**Nhận xét:** Theo kết quả của định lý Ta - lét đảo, ta có được thêm một cách để chứng minh hai đường thẳng song song và đường trung bình của tam giác.

**Thí dụ 5:** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Lấy các điểm  $M, N$  theo thứ tự thuộc  $AB$  và  $AC$  sao cho  $AM = 2MB$  và  $AN = \frac{2}{3}AC$ . Chứng minh rằng ba điểm  $M, N, G$  thẳng hàng.

**Giải**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ .

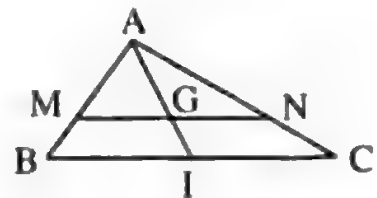
Từ giả thiết về các điểm  $M, N$  ta được:  $\frac{AM}{BM} = 2$  và  $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$ .

Vì  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ , suy ra:

$$\frac{AG}{IG} = 2 \Rightarrow \frac{AG}{IG} = \frac{AM}{BM} \Leftrightarrow MG \parallel BI. \quad (1)$$

$$\frac{AG}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{AI} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow NG \parallel CI. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm  $M, N, G$  thẳng hàng.

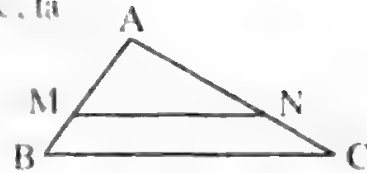


#### 5. HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ TA - LÉT

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Như vậy, trong  $\triangle ABC$  nếu  $MN$  song song với  $BC$ , ta nhận được:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

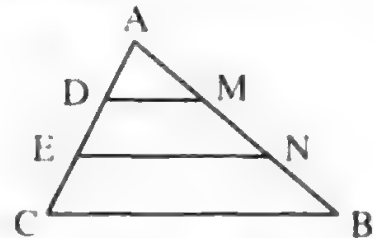


**Thí dụ 6:** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ . Lấy các điểm  $M, N$  trên  $AB$  sao cho  $AM = MN = NB$ . Từ  $M, N$  kẻ các đường thẳng song song với  $BC$  cắt cạnh  $AC$  theo thứ tự tại  $D, E$ . Tính theo  $a$  độ dài các đoạn thẳng  $DM$  và  $EN$ .

*Giải*

Ta lần lượt có:  $\frac{DM}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = \frac{a}{3}$ .

$$\frac{EN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow EN = \frac{2a}{3}$$



**Chú ý:** Hệ quả trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng  $a$  song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

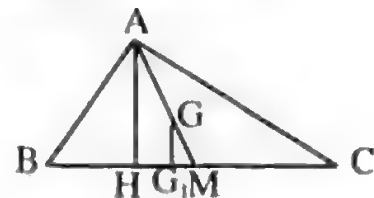
**Ví dụ 1:** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng các tam giác  $\triangle GBC$ ,  $\triangle GAC$ ,  $\triangle GAB$  có diện tích bằng nhau.

*Giải*

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ , dựng cao  $AH$ , hạ  $GG_1$  vuông góc với  $BC$ .

Vì  $GG_1 \parallel AH$  nên:

$$\frac{GG_1}{AH} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow GG_1 = \frac{1}{3} AH.$$



Khi đó,  $\triangle GBC$  có diện tích được cho bởi:

$$S_{\triangle GBC} = \frac{1}{2} GG_1 \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} AH \cdot BC = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} AH \cdot BC \right) = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được:  $S_{\triangle GAC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$ ,  $S_{\triangle GAB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$ .

Vậy, các tam giác  $\triangle GBC$ ,  $\triangle GAC$ ,  $\triangle GAB$  có diện tích bằng nhau.

**Ví dụ 2:** Hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có các đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $AB$ , cắt  $AD$  và  $BC$  theo thứ tự tại  $M$  và  $N$ .

a. Chứng minh rằng  $OM = ON$ .

b. Một đường thẳng đi qua  $O$  cắt hai đáy  $AB$  và  $CD$  thứ tự tại  $E$  và  $F$ . Biết tỉ số

$$\frac{EA}{EB} = \frac{m}{n}, \text{ hãy tính tỉ số } \frac{FD}{FC}.$$

**Giải**

a. Áp dụng định lí Talet, ta lần lượt xét với:

▪ Trong  $\triangle ADC$ , vì  $MO \parallel CD$  nên:  $\frac{OM}{CD} = \frac{AO}{AC}$ . (1)

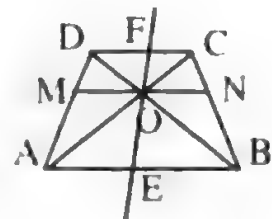
▪ Trong  $\triangle ABC$ , vì  $NO \parallel AB$  nên:  $\frac{AO}{AC} = \frac{BN}{BC}$ . (2)

▪ Trong  $\triangle BCD$ , vì  $NO \parallel CD$  nên:  $\frac{BN}{BC} = \frac{ON}{CD}$ . (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra:  $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD} \Rightarrow OM = ON$ , đpcm.

b. Trong  $\triangle OFC$  vì  $AB \parallel CD$  nên:  $\frac{EA}{FC} = \frac{OE}{OF}$ . (4)

Trong  $\triangle OFD$  vì  $AB \parallel CD$  nên:  $\frac{EB}{FD} = \frac{OE}{OF}$ . (5)



Từ (4) và (5) suy ra:  $\frac{EA}{FC} = \frac{EB}{FD} \Rightarrow \frac{FD}{FC} = \frac{EB}{EA} = \frac{n}{m}$ .

**Nhận xét:**

1. Ta có thể chứng minh  $OM = ON$  bằng phương pháp diện tích.
2. Trong ví dụ trên để chứng minh  $OM = ON$  ta đi chứng minh  $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD}$  bằng cách áp dụng định lí Ta-let ba lần, tỉ số  $\frac{OM}{CD}$  lần lượt bằng  $\frac{AO}{AC}, \frac{BN}{BC}, \frac{ON}{CD}$ .
3. Khai thác kết quả của câu b), trong trường hợp  $m = n$  thì M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD, ta có định lí:

" Trong hình thang, đường thẳng đi qua giao điểm hai đường chéo và trung điểm của một đáy thì đi qua trung điểm của đáy kia".

Nói cách khác:

" Các trung điểm của hai đáy và giao điểm hai đường chéo hình thang là ba điểm thẳng hàng".

**Ví dụ 3:** Trên các cạnh AB, AC của  $\triangle ABC$ , lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ . Gọi I là trung điểm của cạnh BC, K là giao điểm của đường thẳng AI với đường thẳng MN. Chứng minh rằng K là trung điểm của cạnh MN.

Giai

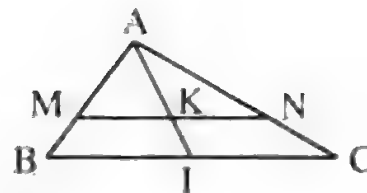
Trong  $\triangle ABC$  ta có:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$

Trong  $\triangle ABI$  vì  $MN \parallel BC$  nên:  $\frac{MK}{BI} = \frac{AK}{AI}$

Trong  $\triangle AIC$  vì  $MN \parallel BC$  nên:  $\frac{AK}{AI} = \frac{KN}{IC}$

Từ (1) và (2) suy ra:  $\frac{MK}{BI} = \frac{KN}{IC} \Rightarrow \frac{MK}{KN} = \frac{BI}{IC} = 1$ .

Vậy K là trung điểm của MN.



(1)

(2)

### Nhận xét:

Từ kết quả của ví dụ trên ta suy ra:

"Trong hình thang, đường thẳng đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên và trung điểm của một đáy thì đi qua trung điểm của đáy kia".

Nói cách khác:

"Giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên và trung điểm của hai đáy là ba điểm thẳng hàng".

Mở rộng:

"Trong hình thang (có hai đáy không bằng nhau), trung điểm của hai đáy, giao điểm hai đường chéo và giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên là bốn điểm thẳng hàng".

Tính chất này được gọi là bổ đề hình thang.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

### Câu hỏi 1:

- Phát biểu định nghĩa tỉ số của hai đoạn thẳng.
- Tính tỉ số  $\frac{AB}{CD}$  biết  $AB = 18\text{cm}$ ,  $CD = 50\text{mm}$ .

### Câu hỏi 2:

- Phát biểu định nghĩa hai cặp đoạn thẳng tỉ lệ.
- Cho tỉ lệ thức  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Điền vào chỗ trống:  $\frac{a-b}{b} = \dots$ ,  $\frac{a}{b-a} = \dots$

### Câu hỏi 3:

- Phát biểu định lý Talet và hệ quả.
- Dùng định lý Talet để chứng minh định lý:

"Nếu một đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì nó đi qua trung điểm cạnh thứ ba".

**Câu hỏi 4:**

- Phát biểu định lý Talet đảo.
- Dùng định lý Talet đảo để chứng minh định lý:  
"Đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh của tam giác thì song song với cạnh thứ ba".

**Câu hỏi 5:**

- Phát biểu hệ quả của định lý Talet.
- Dùng hệ quả của định lý Talet để chứng minh định lý:  
"Đường trung bình của tam giác thì bằng một nửa cạnh thứ ba".

**IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ**

**Bài tập 1:** Tính tỉ số của các cặp đoạn thẳng sau:

- $AB = 15\text{cm}$ ,  $CD = 9\text{cm}$ .
- $EF = 125\text{cm}$ ,  $GH = 10\text{dm}$ .

**Bài tập 2:** Cho  $\triangle ABC$ , các trung tuyến  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  cắt nhau tại  $G$ .

- Tính tỉ số  $\frac{AF}{AB}$ .
- Kể tên một vài cặp đoạn thẳng tỉ lệ với  $AG$  và  $GD$ .

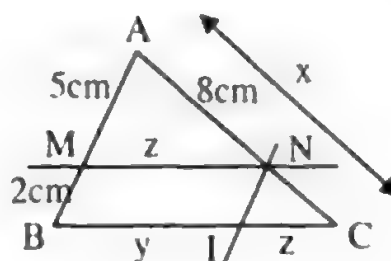
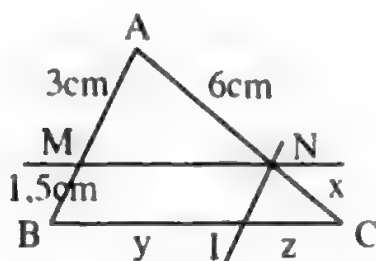
**Bài tập 3:** Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài  $10\text{cm}$ . Các điểm  $C$ ,  $D$  thuộc đường thẳng  $AB$  sao cho  $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}$  ( $C$  nằm trong, còn  $D$  nằm ngoài đoạn thẳng  $AB$ ).

Tính khoảng cách từ  $C$  và từ  $D$  đến  $B$ .

**Bài tập 4:** Cho  $AB = 4CD$  và  $CD = 3A_1B_1$ .

- Tính tỉ số của hai đoạn thẳng  $AB$  và  $A_1B_1$ .
- Biết  $MN = 9\text{cm}$  và  $M_1N_1 = 10,8\text{dm}$ , hỏi hai đoạn thẳng  $AB$ ,  $A_1B_1$  có tỉ lệ với hai đoạn thẳng  $MN$  và  $M_1N_1$  hay không?

**Bài tập 5:** Tính độ dài  $x$ ,  $y$ ,  $z$  của các đoạn thẳng trong hình sau, biết  $BC = 9\text{cm}$ :



**Bài tập 6:** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ . Lấy các điểm M, N trên AB sao cho  $AM = 2MN = 3NB$ . Từ M, N kẻ các đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC theo thứ tự tại D, E. Tính theo a độ dài các đoạn thẳng DM và EN.

**Bài tập 7:** Cho  $\triangle ABC$ ,  $AC = 10\text{cm}$ ,  $BC = 9\text{cm}$ . Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho  $BD = 3\text{cm}$ . Lấy các điểm G, H trên cạnh AC sao cho  $AG = CH = 4\text{cm}$ . Gọi E là giao điểm của BG và AD. Tính tỉ số  $\frac{AE}{AD}$ .

**Bài tập 8:** Cho  $\triangle ABC$ , điểm D thuộc cạnh BC. Cho biết  $S_{\triangle ABD} = 15\text{cm}^2$ .

$S_{\triangle ADC} = 9\text{cm}^2$ . Tính tỉ số  $\frac{BD}{BC}$ .

**Bài tập 9:** Cho  $\triangle ABC$ . Từ điểm N trên AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh BC và AB, chúng cắt các cạnh AB và BC theo thứ tự tại M và I. Chứng minh rằng  $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = 1$ .

**Bài tập 10:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, đường cao AH, điểm D nằm giữa H và C. Kẻ DE vuông góc với BC ( $E \in AC$ ), kẻ DK vuông góc với AC ( $K \in AC$ ). Chứng minh rằng BE song song với HK.

**Bài tập 11:** Hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có các đường chéo cắt nhau tại O. Biết  $OA = \frac{1}{3}OC$ ,  $AB = 4\text{cm}$ . Tính độ dài CD.

**Bài tập 12:** Hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $AB = 15\text{cm}$ ,  $CD = 20\text{cm}$ . Gọi M là trung điểm của CD, E là giao điểm của MA và BD, F là giao điểm của MB và AC.

- Chứng minh rằng EF song song với AB.
- Tính độ dài EF.

**Bài tập 13:** Hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $AB = a$ ,  $CD = b$  ( $a > b$ ). Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD, BD, AC, BC.

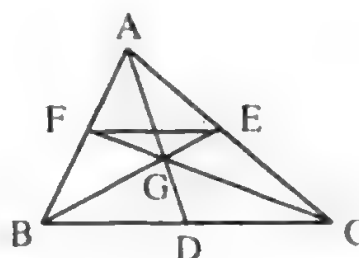
- Chứng minh rằng  $MN = PQ$ .
- Tính độ dài các đoạn thẳng MN, NP, PQ theo a và b.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**  $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}$  và  $\frac{EF}{GH} = \frac{5}{4}$ .

**Bài tập 2.**

- $\frac{AF}{AB} = 1$ .



b. Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có:  $\frac{AG}{GD} = 2$

suy ra các cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD, bao gồm:  $\frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = 2$ ,

tính chất của trọng tâm tam giác.

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{BF} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{BD} = 2, \text{ tính chất trung điểm.}$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{FD} = \frac{AB}{ED} = 2, \text{ tính chất của đường trung bình.}$$

**Bài tập 3.** Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

• Ta có:  $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2}$



$$\Leftrightarrow \frac{CA + CB}{CB} = \frac{3 + 2}{2} \Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow CB = 4\text{cm.}$$

• Ta có:  $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{DA - DB}{DB} = \frac{3 - 2}{2} \Leftrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow DB = 20\text{cm.}$

Vậy, ta tìm được  $CB = 4\text{cm}$  và  $DB = 20\text{cm}$ .

**Bài tập 4.** Học sinh tự làm.

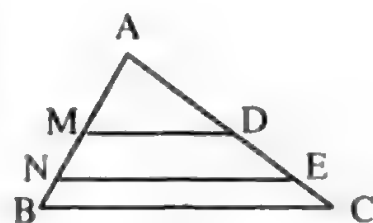
**Bài tập 5.**

a.  $x = 3\text{cm}, y = 6\text{cm}, z = 3\text{cm}.$

b. Học sinh tự làm.

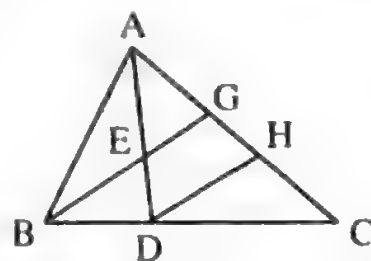
**Bài tập 6.** Đặt  $BN = x$ , suy ra:  $AM = 3x, MN = \frac{3x}{2}$ .

• Ta có:  $\frac{MD}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3x}{3x + \frac{3x}{2} + x} = \frac{6}{11} \Leftrightarrow MD = \frac{6a}{11}$ .



• Ta có:  $\frac{NE}{BC} = \frac{AN}{AB} = \frac{3x + \frac{3x}{2}}{3x + \frac{3x}{2} + x} = \frac{9}{11} \Leftrightarrow NE = \frac{9a}{11}$ .

Vậy, ta tìm được  $MD = \frac{6a}{11}$  và  $NE = \frac{9a}{11}$ .



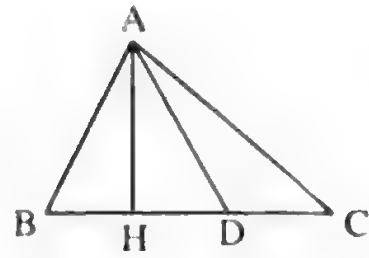
**Bài tập 7.** Nhận xét rằng:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{6}{3} = 2, \frac{CH}{HG} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow DH \parallel BG \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3}.$$

**Bài tập 8.** Kẻ đường cao AH, ta có:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BD}{\frac{1}{2}AH \cdot CD} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

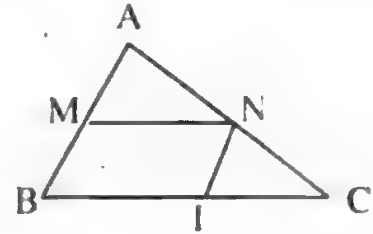
$$\Leftrightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{5}{3 + 5} \Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{5}{8}$$



**Bài tập 9.** Trước tiên, ta thấy MNIB là hình bình hành.

Suy ra:  $\frac{BM}{BA} = \frac{NI}{BA} = \frac{CI}{BC}$ .

Khi đó:  $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = \frac{CI}{BC} + \frac{BI}{BC} = \frac{CI + BI}{BC} = 1$ , đpcm.



**Bài tập 10.** Học sinh tự làm - Dựa trên các đường thẳng song song được suy ra từ tính chất " Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau ".

**Bài tập 11.**  $CD = 12\text{cm}$ .

**Bài tập 12.**

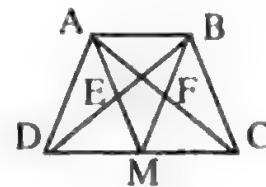
a. Ta lần lượt có nhận xét:

▪ Vì  $MD \parallel AB$  nên:  $\frac{ME}{AE} = \frac{DM}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ .

▪ Vì  $CD \parallel AB$  nên:  $\frac{MF}{BF} = \frac{CM}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ .

Suy ra:  $\frac{ME}{AE} = \frac{MF}{BF} \Leftrightarrow EF \parallel AB$ , đpcm.

b. Ta có ngay:  $\frac{EF}{AB} = \frac{MF}{MB} = \frac{MF}{BF + MF} = \frac{2}{3 + 2} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow EF = 6\text{cm}$ .







# TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

## II. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### II. ĐỊNH LÝ

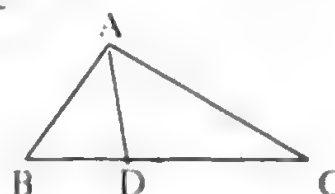
Ta có định lý về đường phân giác:

**Định lý:** Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

Như vậy, trong  $\triangle ABC$  nếu  $AD$  là đường phân giác

của góc  $\widehat{A}$ , ta nhận được:  $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

$$\text{hoặc } \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}.$$



**Thí dụ 1:** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  và  $AD$  là đường phân giác.

- Tính độ dài các đoạn  $BD$  và  $CD$  theo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
- Tính tỉ số diện tích của hai tam giác  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACD$ .

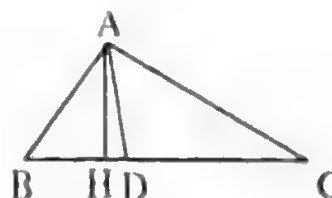
**Giải**

- Đặt  $BD = x$ . Trong  $\triangle ABC$  có  $AD$  là phân giác, suy ra:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{x}{a-x} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow x = \frac{ac}{b+c}$$

$$\Rightarrow CD = BC - BD = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}.$$

$$\text{Vậy, ta được } BD = \frac{ac}{b+c} \text{ và } CD = \frac{ab}{b+c}.$$

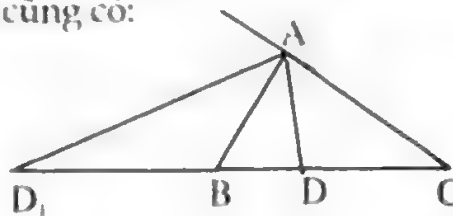


- Kẻ đường cao  $AH$ , ta có:  $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BD}{\frac{1}{2}AH \cdot CD} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$

**Chú ý:** Định lý trên vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác, tức là theo hình bên ta cũng có:

$$\frac{BD_1}{CD_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

$$\text{hoặc } \frac{BD_1}{AB} = \frac{CD_1}{AC}.$$



**Thí dụ 2:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 4\text{cm}$ ,  $AC = 6\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ . Đường phân giác trong và ngoài của góc  $A$  cắt  $BC$  theo thứ tự ở  $D$  và  $D_1$ . Tính độ dài  $BD$ ,  $BD_1$ .

**Giải**

Đặt  $BD = x$  và  $BD_1 = y$ .

Trong  $\triangle ABC$ , ta lần lượt thấy:

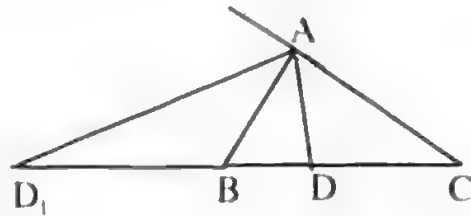
- $AD$  là phân giác trong, suy ra:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{x}{5-x} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow x = 2\text{cm}.$$

- $AD_1$  là phân giác ngoài, suy ra:

$$\frac{BD_1}{CD_1} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{y}{y+5} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow y = 10\text{cm}.$$

Vậy ta được  $BD = 2\text{cm}$  và  $BD_1 = 10\text{cm}$ .



## 2. ĐỊNH LÝ ĐÀO

**Định lý:** Chứng minh rằng nếu một đường thẳng đi qua một đỉnh của một tam giác mà chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy thì nó là đường phân giác trong (hoặc ngoài) của góc tại đỉnh ấy.

**Chứng minh**

Ta xét hai trường hợp là:

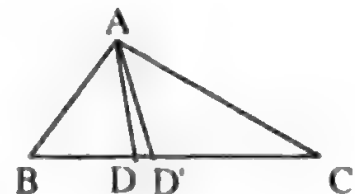
1. Phân giác trong.
2. Phân giác ngoài.

Ta có:

- a. Trường hợp phân giác trong:

Xét  $\triangle ABC$ , giả sử đường thẳng đi qua  $A$  cắt  $BC$

tại  $D$  sao cho:  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .



Ta sẽ chứng minh  $AD$  là phân giác trong của góc  $\widehat{A}$ .

Kẻ phân giác  $AD'$  của  $\triangle ABC$ , ta có ngay:

$$\begin{aligned} \frac{D'B}{D'C} &= \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Leftrightarrow \frac{D'B}{D'B + D'C} = \frac{DB}{DB + DC} \\ \Leftrightarrow \frac{D'B}{BC} &= \frac{DB}{BC} \Leftrightarrow D'B = DB \Leftrightarrow D' \equiv D. \end{aligned}$$

Vậy,  $AD$  là đường phân giác của góc  $\widehat{A}$ .

- b. Trường hợp phân giác ngoài - Đề nghị bạn đọc tự giải.

**Chú ý:**

1. Khái niệm "chia cạnh đối diện" được hiểu theo nghĩa chia trong hoặc chia ngoài một đoạn thẳng.
2. Bài toán trên là bài toán đảo của tính chất đường phân giác của tam giác. Và kết quả này có thể được sử dụng để giải thí dụ sau:

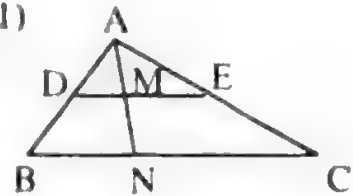
**Thí dụ 3:** Cho  $\Delta ABC$ . Một đường thẳng song song với  $BC$  cắt các cạnh  $AB, AC$  ở  $D, E$ . Biết  $BD = 9\text{cm}$ ,  $CE = 12\text{cm}$ ,  $DE = 14\text{cm}$ . Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $DE$  sao cho  $DM = 6\text{cm}$ . Chứng minh rằng  $AM$  là tia phân giác của góc  $A$ .

**Giải**

Theo giả thiết ta có:  $\frac{MD}{ME} = \frac{MD}{DE - MD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ . (1)

Mặt khác, do  $DE \parallel BC$  nên ta có:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}. \quad (2)$$



Từ (1), (2), suy ra:  $\frac{MD}{ME} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow AM$  là tia phân giác của góc  $A$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

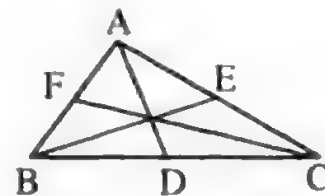
**Ví dụ 1:** Cho  $\Delta ABC$  có các đường phân giác  $AD, BE, CF$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1.$$

**Giải**

Trong  $\Delta ABC$ , ta lần lượt thấy:

- $AD$  là phân giác, suy ra:  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .
- $BE$  là phân giác, suy ra:  $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB}$ .
- $CF$  là phân giác, suy ra:  $\frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}$ .



Khi đó, ta có:  $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1$ .

**Ví dụ 2:** Cho  $\Delta ABC$  với trung tuyến  $AM$ . Đường phân giác của góc  $AMB$  cắt cạnh  $AB$  ở  $D$ , đường phân giác của góc  $AMC$  cắt cạnh  $AC$  ở  $E$ . Chứng minh rằng  $DE \parallel BC$ .

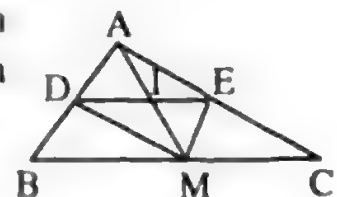
**Giải**

Với  $\Delta AMB$  có  $MD$  là phân giác, suy ra:  $\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}$ . (1)

Với  $\Delta AMC$  có  $ME$  là phân giác, suy ra:  $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}$ . (2)

Theo giả thiết:  $MB = MC$ . (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:  $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \Leftrightarrow DE \parallel BC$ .



- Chú ý:** Khai thác kết quả của  $DE \parallel BC$  ta có thể nêu thêm các câu:
- Gọi  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $DE$ . Chứng minh rằng  $DI = IE$ .
  - Tính độ dài  $DE$  biết  $BC = 30\text{cm}$ ,  $AM = 10\text{cm}$ .

**Giải**

- a. Trong các tam giác  $\triangle AMB$  và  $\triangle AMC$  có  $DE \parallel BC$  suy ra:

$$\frac{DI}{BM} = \frac{AI}{AM} = \frac{EI}{CM} = \frac{EI}{BM} \Leftrightarrow DI = IE.$$

- b. Đặt  $DE = x$ .

Trong  $\triangle DEM$ , ta có:

$\widehat{DME} = 90^\circ$ , vì  $MD, ME$  là tia phân giác của 2 góc kề bù

$DI = IE \Rightarrow MI$  là trung tuyến

$$\Rightarrow MI = \frac{1}{2} DE \Rightarrow AI = AM - MI = 10 - \frac{1}{2}x.$$

$$\text{Trong } \triangle ABM, \text{ ta có: } \frac{DE}{BC} = \frac{AI}{AM} \Leftrightarrow \frac{x}{30} = \frac{10 - \frac{1}{2}x}{10} \Rightarrow x = 12\text{cm}$$

Vậy, ta được  $DE = 12\text{cm}$ .

**Ví dụ 3:** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , có  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Đường phân giác góc  $B$  cắt  $AC$  tại  $M$ , đường phân giác góc  $C$  cắt  $AB$  tại  $N$ .

- Chứng minh rằng  $MN \parallel BC$ .
- Tính độ dài đoạn  $MN$  theo  $a, b$ .

**Giải**

- a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Trong  $\triangle ABC$ , ta lần lượt thấy:

▪  $BM$  là phân giác, suy ra:  $\frac{AM}{CM} = \frac{AB}{BC}$ . (1)

▪  $CN$  là phân giác, suy ra:  $\frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC}$ . (2)

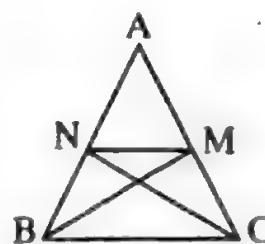
Theo giả thiết:  $AB = AC$ . (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:  $\frac{AM}{CM} = \frac{AN}{BN} \Leftrightarrow MN \parallel BC$ .

b. Từ kết quả câu a), ta được:  $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB} \Leftrightarrow MN = \frac{AN \cdot BC}{AB}$ . (4)

Từ (2) suy ra:  $\frac{AN}{AB - AN} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AN}{a - AN} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow AN = \frac{a^2}{a + b}$ . (5)

Thay (5) vào (4) được:  $MN = \frac{\frac{a^2}{a + b} \cdot b}{a} = \frac{ab}{a + b}$ .



### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu tính chất đường phân giác của tam giác.

**Câu hỏi 2:** Chứng minh rằng " Trong tam giác cân, đường phân giác ứng với cạnh đáy cũng là đường trung tuyến ".

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{C} = 30^\circ$ , phân giác BD. Tính tỉ số  $\frac{AD}{DC}$ .

**Bài tập 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = 5\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$ ,  $AB = 6\text{cm}$  và AD là đường phân giác.

- Tính độ dài các đoạn BD và CD.
- Tính tỉ số diện tích của hai tam giác  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACD$ .

**Bài tập 3.** Cho  $\triangle ABC$  với trung tuyến AM. Đường phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D, đường phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E.

- Chứng minh rằng  $DE \parallel BC$ .
- Gọi I là giao điểm của AM và DE. Chứng minh rằng  $DI = IE$ .
- Tính độ dài DE biết  $BC = 6\text{cm}$ ,  $AM = 8\text{cm}$ .

**Bài tập 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 4\text{cm}$ ,  $AC = 6\text{cm}$ ,  $BC = 8\text{cm}$ . Đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt BC theo thứ tự ở D và E. Tính độ dài BD, BE.

**Bài tập 5.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC = 6\text{cm}$ . Tia phân giác góc B cắt đường cao AH ở I. Biết  $\frac{AI}{IH} = \frac{3}{2}$ . Tính chu vi  $\triangle ABC$ .

**Bài tập 6.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, có  $AB = a$ ,  $AC = b$ , trung tuyến AM, đường phân giác AD và đường cao AH.

- Tính độ dài các đoạn thẳng BC, BD, CD, AM, DM, AH, HD, AD.
- Đường thẳng qua D song song với AB cắt CD tại E, tính độ dài DE.
- Tính diện tích các tam giác  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ACD$ ,  $\triangle ADE$ ,  $\triangle CDE$ .
- Hỏi diện tích  $\triangle ADM$  chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích  $\triangle ABC$ .

**Bài tập 7.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A, có  $AB = a$ ,  $BC = b$ , đường phân giác BD. Đường vuông góc với BD tại B cắt đường thẳng AC kéo dài tại E. Tính độ dài các đoạn thẳng AD, CD, CE.

**Bài tập 8.** Cho  $\triangle ABC$ , có  $AB = a$ ,  $AC = b$ , trung tuyến AM, đường phân giác AD và diện tích  $\triangle ABC$  bằng S. Hỏi diện tích  $\triangle ADM$  chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích  $\triangle ABC$ .

**Bài tập 9.** Cho  $\triangle ABC$ , có  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ , đường phân giác  $AD$  và diện tích  $\triangle ABC$  bằng  $S$ . Đường thẳng qua  $D$  song song với  $AB$  cắt  $CD$  tại  $E$ .

- Tính độ dài các đoạn thẳng  $BD$ ,  $CD$ ,  $DE$ .
- Tính diện tích các tam giác  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ADE$ ,  $\triangle CDE$ .

## V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**  $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$ .

**Bài tập 2.**

a.  $BD = 3\text{cm}$ ,  $CD = 2\text{cm}$ .

b.  $\frac{3}{2}$ .

**Bài tập 3.** Tham khảo ví dụ 2 và chú ý ngay sau đó.

**Bài tập 4.** Tham khảo thí dụ 2.

**Bài tập 5.** Trong  $\triangle ABH$ , ta có:  $\frac{BH}{AB} = \frac{HI}{AI} \Rightarrow BH = 4\text{cm}$ .

Khi đó, chu vi của  $\triangle ABC$  được cho bởi:

$$CV = AB + AC + BC = 2AB + 2HB = 20\text{cm}.$$

**Bài tập 6.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 7.** Hướng dẫn:  $BE$  chính là phân giác ngoài của góc  $B$ .

**Bài tập 8.** Để nghị học sinh tự vẽ hình với  $b > a$ .

Gọi  $S_1$  là diện tích của  $\triangle ADM$ , ta có:

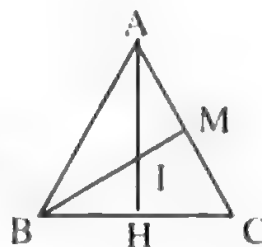
$$\frac{S_1}{S} = \frac{DM}{BC} = \frac{CD - CM}{BC} = \frac{CD}{BC} - \frac{1}{2}. \quad (1)$$

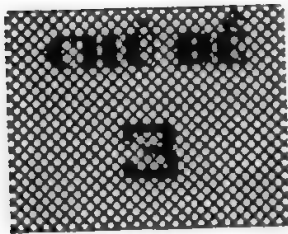
Vì  $AD$  là đường phân giác của góc  $A$  nên:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{CD}{BD + CD} = \frac{b}{a + b} \Leftrightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{b}{a + b}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{b}{a + b} - \frac{1}{2} = \frac{b - a}{2(a + b)} \Leftrightarrow S_1 = \frac{(b - a)S}{2(a + b)}$$





# HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

**Định nghĩa:** Nói  $\Delta A_1B_1C_1$  gọi là đồng dạng với  $\Delta ABC$  nếu:

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A}, \widehat{B_1} = \widehat{B}, \widehat{C_1} = \widehat{C} \\ \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} \end{cases}$$

Khi đó:

- Kí hiệu  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ .
- Tỉ số  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k$  gọi là tỉ số đồng dạng.

**Chú ý:** Khi viết  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ , chúng ta cần hiểu ở đó có sự tương ứng giữa các đỉnh của hai tam giác với nhau, tức là không thể viết lại kí hiệu trên dưới dạng:  $\Delta B_1A_1C_1 \sim \Delta ABC$ , và nếu muốn đảo đỉnh thì cần đảo cả hai vế của dấu đồng dạng:  $\Delta B_1A_1C_1 \sim \Delta BAC$ .

**Thí dụ 1:** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 4\text{cm}$ ,  $CA = 5\text{cm}$ . Biết  $\Delta A_1B_1C_1$  đồng dạng với  $\Delta ABC$ .

- Tính các cạnh  $A_1B_1$ ,  $A_1C_1$ , biết  $B_1C_1 = 8\text{cm}$ .
- Tính các cạnh  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $A_1C_1$ , biết  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$  theo tỉ số bằng 3.

**Giải**

a. Ta có ngay:  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} \Leftrightarrow \frac{A_1B_1}{3} = \frac{8}{4} = \frac{C_1A_1}{5} \Rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 6\text{cm} \\ A_1C_1 = 10\text{cm} \end{cases}$

Vậy, với  $B_1C_1 = 8\text{cm}$  ta được  $A_1B_1 = 6\text{cm}$ ,  $A_1C_1 = 10\text{cm}$ .

b. Ta có ngay:  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1B_1}{3} = \frac{B_1C_1}{4} = \frac{C_1A_1}{5} = 3 \Rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 9\text{cm} \\ B_1C_1 = 12\text{cm} \\ A_1C_1 = 15\text{cm} \end{cases}$$

Vậy, ta được  $A_1B_1 = 9\text{cm}$ ,  $B_1C_1 = 12\text{cm}$ ,  $A_1C_1 = 15\text{cm}$ .

## 2. TÍNH CHẤT

Từ định nghĩa về hai tam giác đồng dạng ta có được các tính chất sau:

1. Mọi tam giác đồng dạng với chính nó

2. Nếu  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$  với tỉ số  $k$  thì  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$  với tỉ số  $\frac{1}{k}$ .

3. Nếu  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$  với tỉ số  $k_1$  và  $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$  với tỉ số  $k_2$  thì  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$  với tỉ số  $k_1 \cdot k_2$ .

**Thí dụ 2:** Cho hai tam giác  $\Delta A_1B_1C_1$  và  $\Delta ABC$  đồng dạng với nhau theo tỉ số  $k$ . Chứng minh rằng tỉ số chu vi của hai tam giác cũng bằng  $k$ .

*Giải*

Từ giả thiết, ta có:

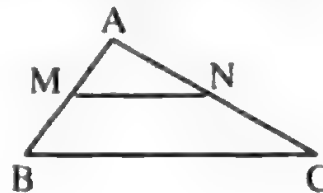
$$k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1}{AB + BC + CA} = \frac{CV_{\Delta A_1B_1C_1}}{CV_{\Delta ABC}}.$$

## 3. ĐỊNH LÝ

**Định lý:** Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

Như vậy, theo hình vẽ ta có:  $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ ,

Tỉ số đồng dạng:  $k = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$

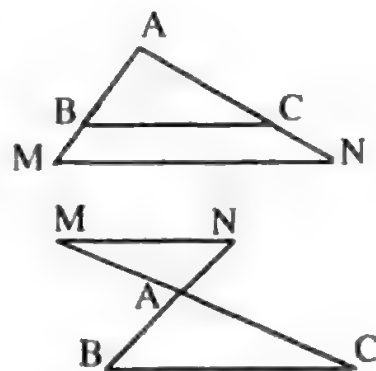


**Chú ý:** Định lý trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng d cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại, tức là theo hình bên ta cũng có:

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC,$$

Tỉ số đồng dạng:

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$



**Thí dụ 3:** Qua điểm O ở bên trong  $\Delta ABC$  kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thành 6 phần, trong đó có 3 tam giác lần lượt có diện tích là  $4\text{cm}^2$ ,  $9\text{cm}^2$ ,  $16\text{cm}^2$ . Tính diện tích của  $\Delta ABC$ .



**Giải**

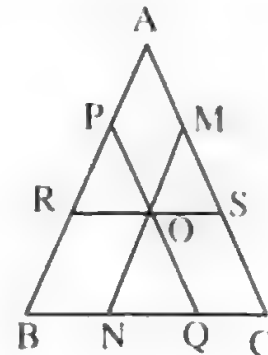
Giả sử qua O kẻ các đường thẳng:  $RS \parallel BC$ ,  $MN \parallel AB$ ,  $PQ \parallel AC$ .

Dễ dàng thấy rằng các tam giác  $\triangle ABC$ ,  $\triangle OMS$ ,  $\triangle OPR$ ,  $\triangle OMQ$  đồng dạng với nhau, do đó nếu gọi  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  theo thứ tự là diện tích của các tam giác. Ta có:

$$\frac{S_1}{S} = \left( \frac{PR}{AB} \right)^2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{PR}{AB}. \quad (1)$$

$$\frac{S_2}{S} = \left( \frac{OM}{AB} \right)^2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{S}} = \frac{OM}{AB} = \frac{AP}{AB}. \quad (2)$$

$$\frac{S_3}{S} = \left( \frac{ON}{AB} \right)^2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{S}} = \frac{ON}{AB} = \frac{RB}{AB}. \quad (3)$$



Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{2+3+4}{\sqrt{S}} = \frac{AP+PR+RB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{S} = 9 \Leftrightarrow S = 81 \text{ cm}^2.$$

Vậy, diện tích của  $\triangle ABC$  là  $S = 81 \text{ cm}^2$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Người ta lập hai bản đồ của một thửa ruộng hình tam giác, bản thứ nhất theo tỉ xích 1: 1000, bản thứ hai theo tỉ xích 1: 10000. Tính tỉ số đồng dạng của bản đồ thứ nhất với bản đồ thứ hai.

**Giải**

Gọi  $\triangle ABC$  là hình biểu diễn mảnh đất,  $\triangle A_1B_1C_1$  và  $\triangle A_2B_2C_2$  là hình của các bản đồ với tỉ xích 1: 1000 và 1: 10000.

Ta có:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC, \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{1000}.$$

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC, \frac{A_2B_2}{AB} = \frac{1}{10000}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{A_1B_1}{AB} : \frac{A_2B_2}{AB} = \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = 10.$$

$$\text{Vậy } \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2, \text{ tỉ số } \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = 10.$$

**Ví dụ 2:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AC = 9\text{cm}$ . Các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho  $BD = 4\text{cm}$ ,  $CE = 6\text{cm}$ .

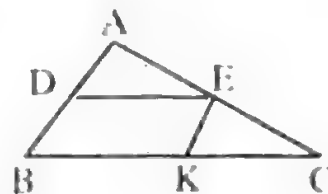
a. Chứng minh rằng  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  và xác định tỉ số đồng dạng.

- b. Kẻ  $EK \parallel AB$  ( $K \in BC$ ). Chứng minh rằng  $\triangle ADE \sim \triangle EKC$ .  
 c. Tính tỉ số chu vi  $\triangle ADE$  và  $\triangle EKC$ .

*Giải*

- a. Trong  $\triangle ABC$  ta có:  $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow DE \parallel BC \rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$



Tỉ số đồng dạng của  $\triangle ADE$  và  $\triangle ABC$  là:  $k = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ .

- b. Theo kết quả câu a) ta có  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ .

Mặt khác vì  $EK \parallel AB$  nên:  $\triangle EKC \sim \triangle ABC$ .

suy ra  $\triangle ADE \sim \triangle EKC$

- c. Theo kết quả câu b) ta có  $\triangle ADE \sim \triangle EKC$  suy ra:

$$\frac{AD}{EK} = \frac{DE}{KC} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} = \frac{AD + DE + AE}{EK + KC + EC} = \frac{CV_{\triangle ADE}}{CV_{\triangle EKC}}.$$

$$\text{Vậy } CV_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} CV_{\triangle EKC}.$$

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Hai tam giác đều có đồng dạng với nhau không? Tại sao?

**Câu hỏi 2:** Hai tam giác bằng nhau có đồng dạng với nhau không? Tại sao?

**Câu hỏi 3:**  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ . Hãy điền vào chỗ trống:  $\hat{C} = \dots$ ,  $\frac{AC}{\dots} = \frac{\dots}{EF}$ .

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 2\text{cm}$ ,  $BC = 4\text{cm}$ ,  $CA = 3\text{cm}$ . Biết  $\triangle A_1B_1C_1$  đồng dạng với  $\triangle ABC$ .

- a. Tính các cạnh  $A_1B_1$ ,  $A_1C_1$ , biết  $B_1C_1 = 10\text{cm}$ .

- b. Tính các cạnh  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $A_1C_1$ , biết  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$  theo tỉ số bằng  $\frac{1}{3}$ .

**Bài tập 2.** Người ta lập hai bản đồ của một thửa ruộng hình tam giác, bản thứ nhất theo tỉ xích 1: 100, bản thứ hai theo tỉ xích 1: 50000. Tính tỉ số đồng dạng của bản đồ thứ nhất với bản đồ thứ hai.

**Bài tập 3.** Cho  $\triangle ABC$  đồng dạng với  $\triangle DEF$ , tỉ số đồng dạng bằng  $\frac{2}{3}$ .

- a. Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.

- b. Tính chu vi  $\triangle DEF$  biết chu vi  $\triangle ABC$  bằng 30cm.  
 c. Tính chu vi của mỗi tam giác đã cho, biết hiệu chu vi của hai tam giác trên bằng 2dm.

**Bài tập 4.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $CD = 2AB$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $CD$ . Chứng minh rằng ba tam giác  $\triangle ADE$ ,  $\triangle ABE$ ,  $\triangle BEC$  đồng dạng với nhau từng đôi một (Lưu ý viết các đỉnh của hai tam giác đồng dạng theo thứ tự tương ứng với nhau).

**Bài tập 5.** Cho  $\triangle ABC$ . Điểm  $D$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$ . Kẻ  $DE \parallel AC$  ( $E \in AB$ ). Gọi  $M$  là trung điểm của  $AD$ . Gọi  $F$  là giao điểm của  $EM$  và  $AC$ .

- a.  $\triangle BED$  đồng dạng với tam giác nào trong hình? Tìm tỉ số đồng dạng.  
 b.  $\triangle ADE$  đồng dạng với tam giác nào trong hình? Tìm tỉ số đồng dạng.

**Bài tập 6.** (Tính chất đường trung bình của tam giác): Cho  $\triangle ABC$ . Một đường thẳng song song với  $BC$ , cắt các cạnh  $AB$  và  $AC$  theo thứ tự ở  $D$  và  $E$ . Biết rằng  $DE = \frac{1}{2}BC$ . Chứng minh rằng  $D$  là trung điểm của  $AB$ .

**Bài tập 7.** (Định lý Mênelai): Cho  $\triangle ABC$ . Một đường thẳng  $d$  không đi qua các đỉnh của tam giác, cắt các đường thẳng  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  theo thứ tự ở  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ .

**Bài tập 8.** (Định lý Xêva): Cho  $\triangle ABC$ . Các điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  theo thứ tự thuộc các cạnh  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  sao cho  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  đồng quy.

Chứng minh rằng:  $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$ .

## V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

### Bài tập 1.

- a.  $A_1B_1 = 5\text{cm}$ ,  $A_1C_1 = 7,5\text{cm}$ .  
 b.  $A_1B_1 = \frac{2}{3}\text{cm}$ ,  $B_1C_1 = \frac{4}{3}\text{cm}$ ,  $A_1C_1 = 1\text{cm}$ .

### Bài tập 2. Học sinh tự làm.

**Bài tập 3.** Gọi  $CV_1, CV_2$  theo thứ tự là chu vi của  $\triangle ABC$  và  $\triangle DEF$

- a.  $\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{2}{3}$ .

b. Ta có ngay:  $CV_2 = \frac{3}{2} CV_1 = 45\text{cm}$ .

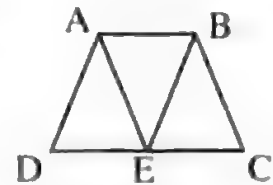
c. Từ kết quả câu a), ta có:

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{CV_1}{CV_2 - CV_1} = \frac{2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{CV_1}{20} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow CV_1 = 40\text{cm}.$$

Khi đó, ta có  $CV_2 = 60\text{cm}$ .

**Bài tập 4.** Với giả thiết E là trung điểm CD ta lần lượt có:

- Vì:  $AB \parallel DE \Leftrightarrow ABED$  là hình bình hành  
 $\Rightarrow AD = BE$



Khi đó, ta nhận được  $\triangle ADE \sim \triangle BEA$ . (1)

- Vì:  $AB \parallel EC \Leftrightarrow ABCE$  là hình bình hành  $\Rightarrow AE = BC$

Khi đó, ta nhận được  $\triangle BEA \sim \triangle BEC$ . (2)

Ngoài ra từ (1) và (2), ta nhận thêm được  $\triangle ADE \sim \triangle BEC$ .

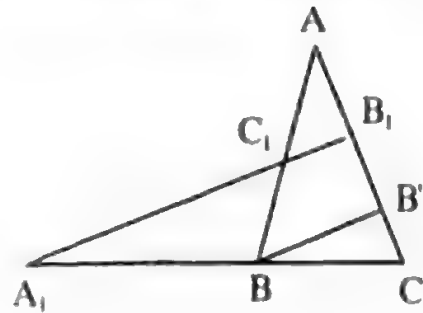
**Bài tập 5.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 6.** Học sinh tự vẽ hình.

Ta có ngay:  $\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow D$  là trung điểm của  $AB$ .

**Bài tập 7.** Kẻ  $BB' \parallel A_1B_1$ , với  $B' \in AC$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } & \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \\ &= \frac{AB_1}{B_1B'} \cdot \frac{B_1B'}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \\ &= \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$



## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐỊNH LÝ

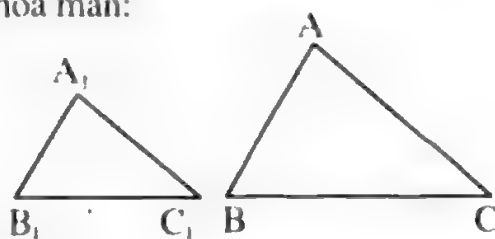
*Định lý: Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.*

Như vậy, nếu hai tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle A_1B_1C_1$  thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$$

$$\Leftrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$$

và khi đó ta có ngay:  $\hat{A}_1 = \hat{A}$ ,  $\hat{B}_1 = \hat{B}$ ,  $\hat{C}_1 = \hat{C}$ .



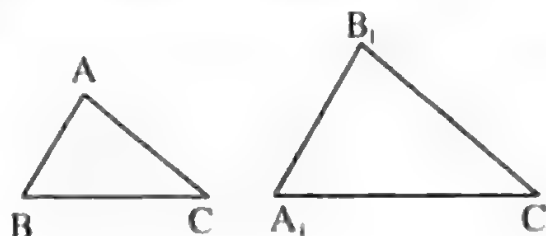
**Thí dụ 1:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$  và  $\triangle A_1B_1C_1$  vuông tại  $B_1$  có  $A_1B_1 = 6\text{cm}$ ,  $B_1C_1 = 8\text{cm}$ . Hỏi rằng hai tam giác vuông  $\triangle ABC$  và  $\triangle A_1B_1C_1$  có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

*Giải*

Trong  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Leftrightarrow AC = 4\text{cm}.$$



Trong  $\triangle A_1B_1C_1$  vuông tại  $B_1$ , ta có:

$$A_1C_1^2 = A_1B_1^2 + B_1C_1^2 = 36 + 64 = 100 \Leftrightarrow A_1C_1 = 10\text{cm}.$$

Nhận xét rằng:  $\frac{AB}{B_1A_1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{BC}{A_1C_1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{CA}{C_1B_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ,

$$\Rightarrow \frac{AB}{B_1A_1} = \frac{BC}{A_1C_1} = \frac{CA}{C_1B_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle B_1A_1C_1 \text{ với tỉ số } k = \frac{1}{2}.$$

**Nhận xét:**

1. Vì  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  và  $\triangle A_1B_1C_1$  vuông tại  $B_1$  nên nếu hai tam giác này đồng dạng thì không thể có tương ứng  $A \rightarrow A_1$ ,  $B \rightarrow B_1$ ,  $C \rightarrow C_1$  bởi ta có  $\hat{A} = \hat{B}_1 = 90^\circ$  do đó tương ứng sẽ phải xuất phát từ  $A \rightarrow B_1$ .
2. Trong lời giải trên, trước tiên chúng ta đi xác định độ dài các cạnh còn lại của hai tam giác dựa trên định lý Pitago,

sau đó bằng việc đánh giá được tỉ số giữa các cạnh tương ứng bằng  $\frac{1}{2}$ , ta khẳng định được  $\Delta ABC \sim \Delta B_1A_1C_1$  với tỉ số  $k = \frac{1}{2}$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho  $\Delta ABC$ , điểm  $O$  ở bên trong tam giác. Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm của  $OA, OB, OC$ .

- Chứng minh rằng  $\Delta ABC$  đồng dạng với  $\Delta MNP$ .
- Tính chu vi của  $\Delta MNP$  biết chu vi của  $\Delta ABC$  bằng 88cm.

**Giải**

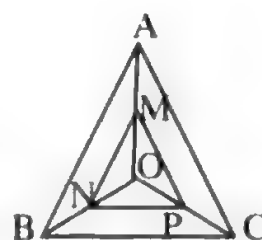
- Trong  $\Delta OAB$ , ta có:  $\begin{cases} OM = AM \\ ON = BN \end{cases}$

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2} AB \Leftrightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh tương tự, ta có:  $\frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}, \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2}.$

Vậy ta được:  $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta MNP \sim \Delta ABC$  theo tỉ số  $k = \frac{1}{2}.$

- Ta có ngay:  $\frac{CV_{\Delta MNP}}{CV_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CV_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} CV_{\Delta ABC} = 44\text{cm}.$



**Ví dụ 2:** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $AB = 6\text{cm}, BC = 10\text{cm}, CA = 8\text{cm}$ . Trên  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = 4\text{cm}$ , trên  $AC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = 3\text{cm}$ . Chứng minh rằng  $\Delta ABC$  đồng dạng với  $\Delta ANM$ .

**Giải**

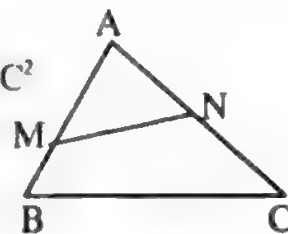
Trong  $\Delta ABC$ , ta có nhận xét:  $AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = BC^2$   
 $\Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông tại  $A$ .

Trong  $\Delta AMN$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow MN = 5\text{cm}.$$

Nhận xét rằng:  $\frac{AN}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{NM}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \frac{MA}{CA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{NM}{BC} = \frac{MA}{CA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta ANM \sim \Delta ABC \text{ với tỉ số } k = \frac{1}{2}.$$



**Chú ý:** Xuất phát từ tam giác vuông có độ dài các cạnh bằng 3cm, 4cm, 5cm và dựa trên sự đồng dạng theo tỉ số ba cạnh chúng ta sẽ tạo ra được vô số tam giác vuông có các cạnh nguyên là:

6cm, 8cm, 10cm

9cm, 12cm, 15cm

...

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định lý về sự đồng dạng của hai tam giác trong trường hợp c.c.c. Cho ví dụ.

**Câu hỏi 2:** Hỏi hai tam giác vuông có đồng dạng với nhau không nếu:

- Các cặp cạnh góc vuông tỉ lệ?
- Một cặp cạnh góc vuông và cặp cạnh huyền tỉ lệ?

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Hai tam giác sau có đồng dạng không nếu độ dài các cạnh của chúng bằng:

- 8cm, 12cm, 18cm và 27cm, 18cm, 12cm.
- 3cm, 4cm, 6cm và 9cm, 15cm, 18cm.

**Bài tập 2.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$  và  $\triangle A_1B_1C_1$  vuông tại  $A_1$  có  $A_1B_1 = 9\text{cm}$ ,  $B_1C_1 = 15\text{cm}$ . Hỏi rằng hai tam giác vuông  $\triangle ABC$  và  $\triangle A_1B_1C_1$  có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

**Bài tập 3.** Tứ giác ABCD có  $AB = 4\text{cm}$ ,  $BC = 20\text{cm}$ ,  $CD = 25\text{cm}$ ,  $DA = 8\text{cm}$ , đường chéo  $BD = 10\text{cm}$ .

- Các  $\triangle ABD$  và  $\triangle BDC$  có đồng dạng không?
- Chứng minh rằng AB song song với CD.

**Bài tập 4.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm G. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của GA, GB, GC.

- Chứng minh rằng  $\triangle MNP$  đồng dạng với  $\triangle ABC$  với tỉ số đồng dạng  $k = \frac{1}{2}$ .
- Tính chu vi của  $\triangle ABC$  biết chu vi của  $\triangle MNP$  bằng 18cm.

**Bài tập 5.** Cho  $\triangle ABC$  có trực tâm H. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC.

- Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  đồng dạng với  $\triangle MNP$  với tỉ số đồng dạng  $k = 2$ .
- Tính chu vi của  $\triangle MNP$  biết chu vi của  $\triangle ABC$  bằng 78cm.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

### Bài tập 1.

a. Hai tam giác đồng dạng với tỉ số  $k = \frac{2}{3}$ .

b. Hai tam giác không đồng dạng.

### Bài tập 2. Hai tam giác vuông này có đồng dạng.

Thật vậy:

▪ Trong  $\triangle ABC$ , ta có:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5\text{cm}$ .

▪ Trong  $\triangle A_1B_1C_1$ , ta có:

$$A_1C_1^2 = B_1C_1^2 - A_1B_1^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow A_1C_1 = 12\text{cm}.$$

Khi đó, nhận thấy rằng:

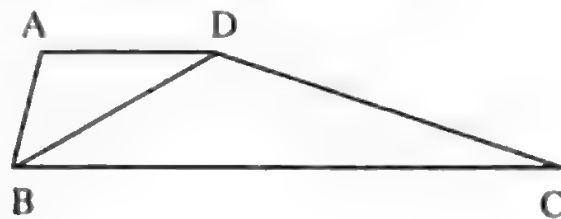
$$\frac{AB}{B_1A_1} = \frac{BC}{A_1C_1} = \frac{CA}{C_1B_1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle B_1A_1C_1 \text{ với tỉ số } k = \frac{1}{3}.$$

### Bài tập 3.

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC \text{ với tỉ số } k = \frac{2}{5}.$$



b. Dựa trên kết quả của câu a), ta có ngay:

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Leftrightarrow AB \parallel CD \text{ vì có hai góc so le trong bằng nhau.}$$

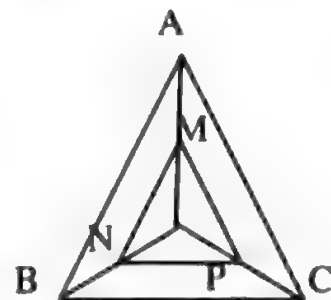
### Bài tập 4.

a. Trong  $\triangle GAB$ , ta có:  $\begin{cases} GM = AM \\ GN = BN \end{cases} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}.$

Chứng minh tương tự, ta có:  $\frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}, \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2}.$

$$\text{Vậy ta được: } \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \triangle MNP \sim \triangle ABC \text{ theo tỉ số } k = \frac{1}{2}.$$



b. Ta có ngay:  $\frac{CV_{\triangle MNP}}{CV_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CV_{\triangle ABC} = 2CV_{\triangle MNP} = 36\text{cm}.$

### Bài tập 5. Làm tương tự như trong bài tập 4.

Đáp số:  $CV_{\triangle MNP} = 39\text{cm}.$



## I. PHƯƠNG PHÁP

### 1. ĐỊNH LÝ

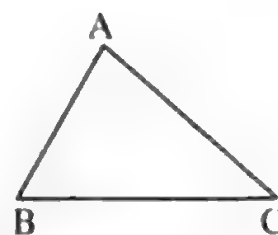
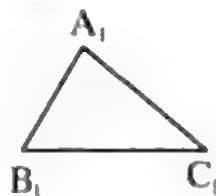
**Định lý:** Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đó đồng dạng.

Như vậy, nếu hai tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle A_1B_1C_1$  thoả mãn:

$$\begin{cases} \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1A_1}{CA} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$$

và khi đó ta có ngay:

$$\begin{cases} \widehat{B_1} = \widehat{B}, \widehat{C_1} = \widehat{C} \\ \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1A_1}{CA} \end{cases}$$



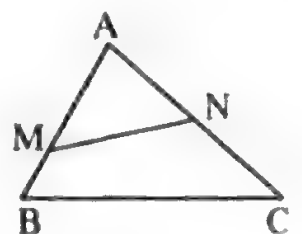
**Thí dụ 1:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 12\text{cm}$ ,  $AC = 15\text{cm}$ ,  $BC = 18\text{cm}$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = 10\text{cm}$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = 8\text{cm}$ .

- Tam giác  $\triangle AMN$  đồng dạng với tam giác nào ?
- Tính độ dài đoạn  $MN$ .

**Giải**

- Với hai tam giác  $\triangle AMN$  và  $\triangle ABC$ , ta có:

$$\begin{cases} \frac{AM}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \\ \frac{AN}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \widehat{A} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle AMN \sim \triangle ACB \text{ với tỉ số đồng dạng } k = \frac{2}{3}.$$



- Theo câu a), ta có ngay:  $\frac{MN}{CB} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow MN = \frac{AM \cdot CB}{AC} = 12\text{cm}.$

Vậy, ta được  $MN = 12\text{cm}.$

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 4\text{cm}$ ,  $AC = 5\text{cm}$ ,  $BC = 6\text{cm}$ . Trên tia đối của tia  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $AD = 5\text{cm}$ .

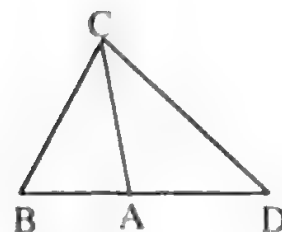
- Tam giác  $ABC$  đồng dạng với tam giác nào ?
- Tính độ dài  $CD$ .

c. Chứng minh rằng  $\widehat{BAC} = 2\widehat{ACB}$

*Giải*

a. Với hai tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle CBD$ , ta có nhận xét:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bchung} \\ \frac{AB}{CB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{BC}{BD} = \frac{6}{4+5} = \frac{2}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle CBD.$$



b. Từ kết quả câu a), ta có:  $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow CD = \frac{AC \cdot CB}{AB} = 7,5\text{cm}.$

Vậy, ta được  $CD = 7,5\text{cm}.$

c. Từ kết quả câu a), ta có ngay:  $\widehat{BAC} = \widehat{BCD}.$

$$\text{Nhận xét rằng: } \frac{BA}{DA} = \frac{4}{5}, \frac{BC}{DC} = \frac{6}{7,5} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DC} \Leftrightarrow CA \text{ là đường phân giác của góc } \widehat{BCD}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BCD} = 2\widehat{ACB} \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{ACB}.$$

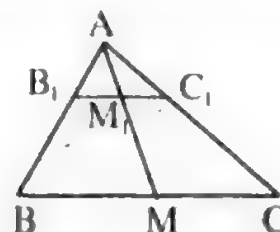
**Ví dụ 2:** Dựng  $\triangle ABC$  biết  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$  và trung tuyến  $AM = 3\text{cm}.$

*Giải*

**Phân tích:** Giả sử đã dựng được  $\triangle ABC$  thoả mãn điều kiện đầu bài.

Với điểm  $M_1$  bất kỳ trên  $AM$ , dựng đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AB$ ,  $AC$  theo thứ tự tại  $B_1, C_1$ , ta có:

$$AM_1 \text{ là trung tuyến của } \triangle AB_1C_1: \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}.$$



**Cách dựng:** Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng góc  $\widehat{xAy} = 60^\circ$ .
- Trên  $Ax$  lấy điểm  $B_1$  bất kỳ, trên  $Ay$  lấy điểm  $C_1$  sao cho  $AC_1 = 2AB_1$ .
- Gọi  $M_1$  là trung điểm  $B_1C_1$ , trên tia  $AM_1$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = 3\text{cm}.$
- Qua  $M$  dựng đường thẳng song song với  $B_1C_1$ , cắt  $AB_1$  và  $AC_1$  thứ tự tại  $B$  và  $C$ .

Khi đó,  $\triangle ABC$  là tam giác phải dựng.

$$\text{Chứng minh: Vì } BC \parallel B_1C_1 \text{ nên: } \frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{1}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{BM}{B_1M_1} = \frac{AM}{AM_1} = \frac{MC}{M_1C_1} \\ B_1M_1 = C_1M_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow BM = MC.$$

**Biện luận:** Bài toán có một nghiệm hình.

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định lý về sự đồng dạng của hai tam giác trong trường hợp c.g.c. Cho ví dụ.

**Câu hỏi 2:** Hỏi hai tam giác vuông có đồng dạng với nhau không nếu có các cặp cạnh góc vuông tỉ lệ ?

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 8\text{cm}$ ,  $AC = 10\text{cm}$ ,  $BC = 12\text{cm}$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = 5\text{cm}$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = 4\text{cm}$ .

- Tam giác  $\triangle AMN$  đồng dạng với tam giác nào ?
- Tính độ dài đoạn  $MN$ .

**Bài tập 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 10\text{cm}$ ,  $AC = 20\text{cm}$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $AD = 2,5\text{cm}$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = 5\text{cm}$ .

- Tam giác  $ABC$  đồng dạng với tam giác nào ?
- Chứng minh rằng  $\widehat{ABE} = \widehat{ACB}$ .
- Tính độ dài  $DE$ , biết  $BE = 8\text{cm}$ .

**Bài tập 3.** Cho góc  $\widehat{xOy}$  ( $\widehat{xOy} \neq 180^\circ$ ). Trên  $Ox$  lấy hai điểm  $A, B$  sao cho  $OA = 3\text{cm}$ ,  $OB = 6\text{cm}$ . Trên  $Oy$  lấy hai điểm  $C, D$  sao cho  $OC = 4\text{cm}$ ,  $OD = 8\text{cm}$ .

- Chứng minh rằng hai tam giác  $\triangle OAD$  và  $\triangle OCB$  đồng dạng.
- Gọi  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $\triangle IAB$  và  $\triangle ICD$  có các góc bằng nhau từng đôi một.

**Bài tập 4.** Cho hai tam giác  $\triangle A_1B_1C_1$  và  $\triangle ABC$  đồng dạng với nhau theo tỉ số  $k$ . Chứng minh rằng:

- Tỉ số của hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng  $k$ .
- Tỉ số của hai đường cao tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng  $k$ .
- Tỉ số của hai đường phân giác tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng  $k$ .

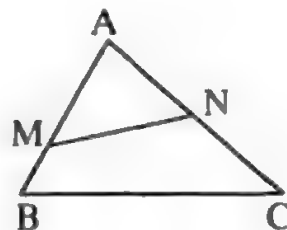
**Bài tập 5.** Dựng  $\triangle ABC$  biết:

- $\widehat{A} = 90^\circ$ ,  $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$  và trung tuyến  $AM = 4\text{cm}$ .
- $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$  và đường cao  $AH = 3\text{cm}$ .
- $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$  và phân giác  $AD = 5\text{cm}$ .

### V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

- Với hai tam giác  $\triangle AMN$  và  $\triangle ABC$ , ta có:



$$\begin{cases} \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2} \\ \widehat{A} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta AMN \sim \Delta ACB \text{ với tỉ số đồng dạng } k = \frac{1}{2}.$$

b. Theo câu a), ta có ngay:  $\frac{MN}{CB} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow MN = \frac{AM \cdot CB}{AC} = 6\text{cm}.$

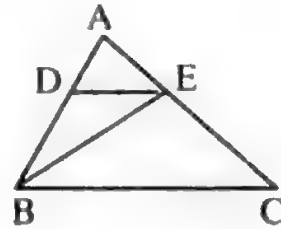
Vậy, ta được  $MN = 6\text{cm}.$

### Bài tập 2.

a. Ta lần lượt có nhận xét:  $\begin{cases} \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4} \text{ và } \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \\ \widehat{A} \text{ chung} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \text{ với tỉ số đồng dạng } k = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{cases} \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2} \\ \widehat{A} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABE \sim \Delta ACB \text{ với tỉ số đồng dạng } k = \frac{1}{2}.$$



b. Theo kết quả:  $\Delta ABE \sim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACB}.$

c. Theo các kết quả câu a), ta lần lượt có:

$$\Delta ABE \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{BE}{CB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = 16\text{cm}.$$

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow DE = 4\text{cm}.$$

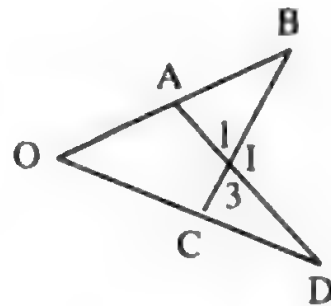
Vậy ta được  $DE = 4\text{cm}.$

### Bài tập 3.

a. Với hai tam giác  $\Delta OAD$  và  $\Delta OCB$ , ta có:

$$\begin{cases} \frac{OA}{OC} = \frac{3}{4} \text{ và } \frac{OB}{OD} = \frac{3}{4} \\ \widehat{O} \text{ chung} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Delta OAD \sim \Delta OCB \text{ với tỉ số đồng dạng } k = \frac{3}{4}.$$



b. Với hai tam giác  $\Delta IAB$  và  $\Delta ICD$ , ta có:

$$\widehat{B} = \widehat{D}, \text{ dựa theo kết quả câu a),}$$

$$\widehat{I_1} = \widehat{I_3}, \text{ vì đối đỉnh.}$$

$$\widehat{A} = \widehat{C}, \text{ dựa trên tính chất tổng ba góc trong tam giác bằng } 180^\circ.$$

Vậy, hai tam giác  $\Delta IAB$  và  $\Delta ICD$  có các góc bằng nhau từng đôi một.

### Bài tập 4. Học sinh tự làm.

### Bài tập 5. Tham khảo ví dụ 2.

### I. PHƯƠNG PHÁP

#### 1. ĐỊNH LÝ

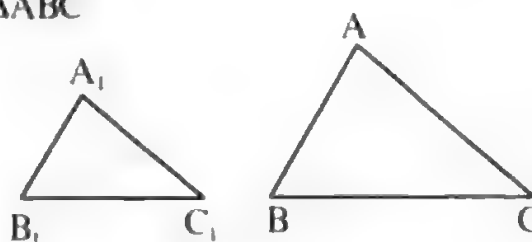
**Định lý:** Nếu hai góc của tam giác này bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Như vậy, nếu hai tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle A_1B_1C_1$  thoả mãn:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}, \hat{B}_1 = \hat{B} \Leftrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$$

và khi đó ta có ngay:

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C} \\ \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} \end{cases}$$

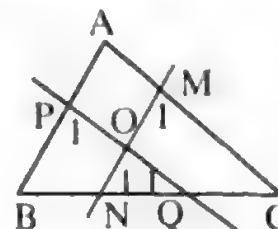


**Thí dụ 1:** Cho  $\triangle ABC$ , O là điểm ở bên trong tam giác. Kẻ qua O đường thẳng song song với AB cắt AC, BC theo thứ tự tại M, N. Kẻ qua O đường thẳng song song với AC cắt AB, BC theo thứ tự tại P, Q. Hãy vẽ hình và chỉ ra trên hình đó những tam giác đồng dạng và giải thích vì sao chúng đồng dạng ?

*Giải*

Vì  $MN \parallel AB$  nên:  $\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{A} \\ \hat{N}_1 = \hat{B} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle MCN \sim \triangle ACB.$

Vì  $PQ \parallel AC$  nên:  $\begin{cases} \hat{P}_1 = \hat{A} \\ \hat{Q}_1 = \hat{C} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle PBQ \sim \triangle ABC.$



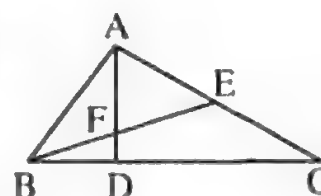
Ta có được:  $\begin{cases} \hat{N}_1 = \hat{B} \\ \hat{Q}_1 = \hat{C} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ONQ \sim \triangle ABC \Rightarrow \triangle ONQ \sim \triangle PBQ.$

Vậy, ta có được bốn cặp tam giác đồng dạng.

### II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, đường cao AD, đường phân giác BE. Giả sử AD cắt BE tại F. Chứng minh rằng

$$\frac{EA}{EC} = \frac{FD}{FA}.$$



*Giải*

Trong  $\triangle ABD$  có BF là phân giác suy ra:  $\frac{FD}{FA} = \frac{BD}{BA}$ . (1)

Với hai tam giác  $\triangle ABD$  và  $\triangle CBA$ , ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \widehat{ADB} = \widehat{CAB} \\ \widehat{B} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABD \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB} \quad (2)$$

Trong  $\triangle ABC$  có BE là phân giác suy ra:  $\frac{AB}{CB} = \frac{EA}{EC}$ . (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh.

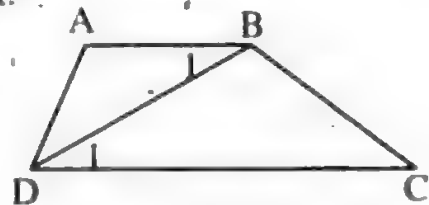
**Ví dụ 2:** Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), biết  $AB = 5\text{cm}$ ,  $BD = 10\text{cm}$ ,  $AD = 7\text{cm}$  và  $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$ .

- Chứng minh rằng  $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ .
- Tính độ dài các đoạn thẳng BC, CD.
- Hãy dựng hình thang ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài.

*Giải*

- Với hai tam giác  $\triangle ABD$  và  $\triangle BDC$ , ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \widehat{DAB} = \widehat{CBD} \\ \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC.$$



- Từ kết quả câu a), ta có:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CD}{DB} = \frac{DB}{BA} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \begin{cases} BC = 14\text{cm} \\ CD = 20\text{cm} \end{cases}$$

Vậy ta được  $BC = 14\text{cm}$  và  $CD = 20\text{cm}$ .

- Ta cần thực hiện theo bốn bước sau:

**Phân tích:** Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét rằng:

- $\triangle ABD$  dựng được ngay.
- Điểm C thuộc tia Dx song song với AB sao cho  $CD = 20\text{cm}$ .

**Cách dựng:** Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng  $\triangle ABD$  biết độ dài ba cạnh.
- Dựng Dx // AB, trên Dx lấy điểm C sao cho  $CD = 20\text{cm}$ .

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

**Chứng minh:** Bạn đọc tự chứng minh.

**Biện luận:** Bài toán có một nghiệm hình.

**Ví dụ 3:** Cho  $\Delta ABC$  có ba góc nhọn, các điểm M và N thứ tự là trung điểm của BC và AC. Gọi H, O, G theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của  $\Delta ABC$ .

- Tìm các tam giác đồng dạng với  $\Delta AHB$ .
- Chứng minh rằng  $\Delta HAG \sim \Delta OMG$ .
- Chứng minh rằng ba điểm H, G, O thẳng hàng.

**Giải**

- Ta có:

$MN \parallel AB$  vì MN là đường trung bình của  $\Delta ABC$ .

$AH \parallel MO$  vì cùng vuông góc với BC,

$BH \parallel NO$  vì cùng vuông góc với AC,

từ đó suy ra các góc có cạnh tương ứng song song bằng nhau là:

$$\begin{cases} \widehat{HAB} = \widehat{OMN} \\ \widehat{BHA} = \widehat{NOM} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta AHB \sim \Delta MON.$$

Vậy, ta được  $\Delta AHB \sim \Delta MON$ .

- Theo câu a) ta có:  $\Delta AHB \sim \Delta MON \Rightarrow \frac{AH}{MO} = \frac{AB}{MN} = 2$ .

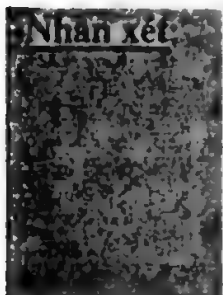
Mặt khác, vì G là trọng tâm của  $\Delta ABC$  nên:  $\frac{AG}{MG} = 2 = \frac{AH}{MO}$ .

Xét hai tam giác  $\Delta HAG$  và  $\Delta OMG$ , ta có:

$$\begin{cases} \frac{AH}{MO} = \frac{AG}{MG} \\ \widehat{HAG} = \widehat{OMG} \text{ so le trong} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta HAG \sim \Delta OMG.$$

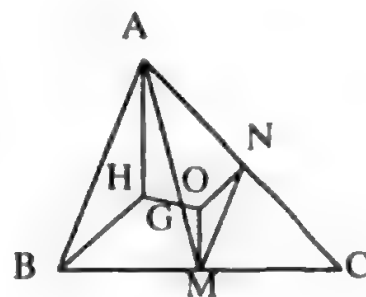
- Theo câu b) ta có:  $\widehat{AGH} = \widehat{MGO}$ .

- Mặt khác, ta có:  $180^\circ = \widehat{MGO} + \widehat{AGO} = \widehat{AGH} + \widehat{AGO}$   
 $\Rightarrow H, G, O$  thẳng hàng.



**Nhận xét:**

Kết quả câu c) khẳng định "Trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác nằm trên một đường thẳng (đường thẳng *ole*)", trong đó khoảng cách từ trọng tâm đến trực tâm gấp đôi khoảng cách từ trọng tâm đến giao điểm ba đường trung trực.



### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định lý về sự đồng dạng của hai tam giác trong trường hợp c.g.c. Cho ví dụ.

**Câu hỏi 2:** Hỏi hai tam giác vuông có đồng dạng với nhau không nếu có một cặp góc nhọn bằng nhau ?

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho  $\triangle ABC$ , các đường cao  $BD$ ,  $CE$ . Chứng minh rằng:

a.  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ .

b.  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ .

**Bài tập 2.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Từ  $H$  hạ  $HK$  vuông góc với  $AC$ . Hãy vẽ hình và chỉ ra trên hình đó những tam giác đồng dạng và giải thích vì sao chúng đồng dạng ?

**Bài tập 3.** Cho hai tam giác  $\triangle A_1B_1C_1$  và  $\triangle ABC$  đồng dạng với nhau theo tỉ số  $k$ . Chứng minh rằng:

a. Tỉ số của hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng  $k$ .

b. Tỉ số của hai đường phân giác tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng  $k$ .

**Bài tập 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$ ,  $F$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB$ ,  $CD$ . Chứng minh rằng  $\triangle ADE \sim \triangle CBF$ .

**Bài tập 5.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ .

a. Chứng minh rằng  $OA \cdot OD = OB \cdot OC$ .

b. Đường thẳng qua  $O$  vuông góc với  $AB$  và cắt  $AB$ ,  $CD$  theo thứ tự tại  $H$ ,  $K$ . Chứng minh rằng  $OH \cdot CD = OK \cdot AB$ .

**Bài tập 6.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\hat{A} = 2\hat{B}$ . Tính độ dài  $AB$  biết  $AC = 9\text{cm}$ ,  $BC = 12\text{cm}$ .

**Bài tập 7.** Hình thang vuông  $ABCD$  có  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ , điểm  $E$  thuộc cạnh  $AD$ . Biết  $AB = 10\text{cm}$ ,  $AE = 15\text{cm}$ ,  $DE = 12\text{cm}$  và  $\widehat{AEB} = \widehat{BCD}$ .

a. Trong hình vẽ đó hãy chỉ ra các cặp tam giác đồng dạng.

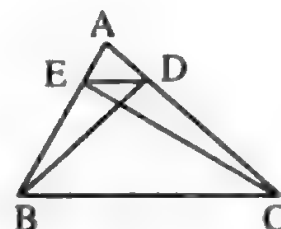
b. Chứng minh rằng  $\widehat{BEC} = 90^\circ$ .

### V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. Với hai tam giác  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACE$ , ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^\circ \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE, \text{ đpcm.}$$



b. Từ kết quả câu a), ta được:  $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ .



Khi đó, với hai tam giác  $\triangle ADE$  và  $\triangle ABC$ : 
$$\begin{cases} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ , dpcm.

**Bài tập 2.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 3.** Học sinh tự làm.

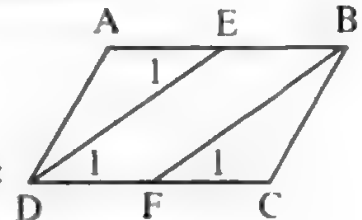
**Bài tập 4.** Dựa trên tính chất song song của hình bình hành, ta có:

$\widehat{E_1} = \widehat{D_1}$ , vì so le trong.

$\widehat{D_1} = \widehat{F_1}$ , vì đồng vị.  $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{F_1}$ .

Khi đó, với hai tam giác  $\triangle ADE$  và  $\triangle CBF$ , ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{E_1} = \hat{F_1} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ADE \sim \triangle CBF, \text{ dpcm.}$$



**Bài tập 5.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 6.** Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

**Cách 1:** Gọi AD là tia phân giác góc  $\hat{A}$ , suy ra:

▪ Với hai tam giác  $\triangle ACD$  và  $\triangle BCA$ , ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \hat{A_1} = \hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} \\ \hat{C} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ACD \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow CD = \frac{27}{4} \text{ cm.}$$

▪ Theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot BD}{CD} = \frac{AC \cdot (BC - CD)}{CD} = 7 \text{ cm.}$$

Vậy, ta được  $AB = 7 \text{ cm.}$

**Cách 2:** Trên tia đối của tia AC lấy E sao cho  $AE = AB$ .

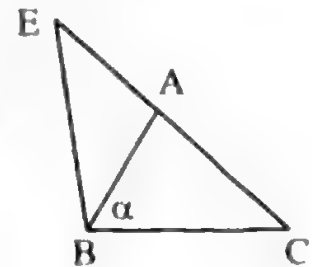
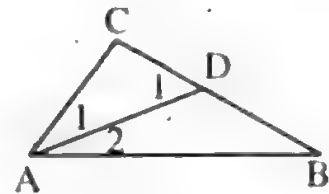
Đặt  $\hat{B} = \alpha$  thì  $\hat{A} = 2\alpha$ ,  $\widehat{E} = \widehat{ABE} = \alpha$ .

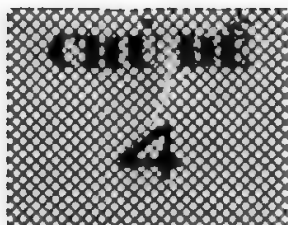
Đặt  $AB = AE = x$ .

Với hai tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle BEC$ , ta có: 
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{CBE} \\ \widehat{ABC} = \hat{E} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle BEC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC} \Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{12}{x+9} \Rightarrow x = 7 \text{ cm.}$$

Vậy, ta được  $AB = 7 \text{ cm.}$





## CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. ÁP DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VÀO TAM GIÁC VUÔNG

Từ các trường hợp đồng dạng của tam giác, ta suy ra hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu:

1. Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.  
Thật vậy, khi đó vì chúng luôn có thêm hai góc vuông bằng nhau, nên chúng có hai góc bằng nhau.
2. Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.  
Thật vậy, khi đó chúng có thêm hai cạnh huyền tỉ lệ (dựa trên định lý Pi-ta-go).

**Thí dụ 1:** Hình thang vuông ABCD có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = 4\text{cm}$ ,  $CD = 9\text{cm}$ .  
Tính độ dài BD biết rằng BD vuông góc với BC.

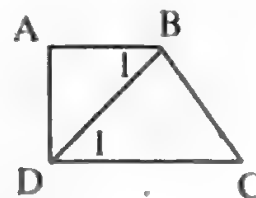
*Giải*

Xét hai tam giác vuông  $\triangle ABD$  và  $\triangle BDC$  có:

$$\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 \Leftrightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{BD} \Leftrightarrow BD^2 = AB \cdot DC = 4 \cdot 9 = 36 \Leftrightarrow BD = 6\text{cm}.$$

Vậy, ta được  $BD = 6\text{cm}$ .



**Nhận xét:** Như vậy, bằng việc đánh giá được  $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$  (góc nhọn trong tam giác vuông) chúng ta có ngay được kết luận  $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ , từ đó dựa trên tỉ số đồng dạng giữa các cạnh chúng ta tính được độ dài cạnh BD. Thí dụ tiếp theo, minh họa việc sử dụng trường hợp thứ hai (hai cạnh góc vuông tỉ lệ)

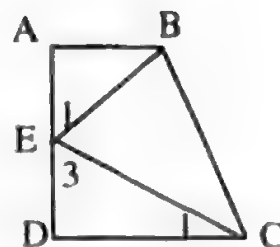
**Thí dụ 2:** Hình thang vuông ABCD có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = 6\text{cm}$ ,  $CD = 12\text{cm}$ ,  $AD = 17\text{cm}$ . Lấy điểm E trên cạnh AD sao cho  $AE = 8\text{cm}$ .

- a. Hỏi  $\triangle ABE$  đồng dạng với tam giác nào? Vì sao?
- b. Chứng minh rằng  $\widehat{BEC} = 90^\circ$ .

*Giải*

a. Xét hai tam giác vuông  $\triangle ABE$  và  $\triangle DEC$ , ta có:

$$\begin{cases} \frac{AB}{DE} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ \frac{AE}{DC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DC} \Leftrightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC.$$



b. Theo kết quả câu a), ta suy ra:  $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$ .

Mặt khác, trong  $\triangle CDE$  vuông tại D, ta có:  $\widehat{C}_1 + \widehat{E}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{E}_3 = 90^\circ$ .

Khi đó:  $\widehat{BEC} = 180^\circ - \widehat{E}_1 + \widehat{E}_3 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

**Nhận xét:**

Như vậy, bằng việc đánh giá được  $\frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DC}$  (hai cạnh góc vuông tỉ lệ) chúng ta có ngay được kết luận  $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ , từ đó dựa sự bằng nhau giữa các góc chúng ta tính được số đo của góc  $\widehat{BEC}$ . Các em học sinh cần nhớ rằng trong bài kiểm tra thông thường câu a) không được để cập, điều này dẫn tới việc các em cần có được định hướng chính xác công việc cần thực hiện, cụ thể:

- Để chứng minh  $\widehat{BEC} = 90^\circ$  ta cần chứng minh:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_3 = 90^\circ.$$

- Nhận xét rằng  $\widehat{E}_1$  và  $\widehat{E}_3$  là hai góc nhọn trong hai tam giác vuông, do vậy nếu có  $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_3 = 90^\circ$  thì  $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$ , tức là khi đó hai tam giác vuông này đồng dạng.
- Từ đó, chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc chứng minh  $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ .

Tuy nhiên, với chỉ một yêu cầu chứng minh  $\widehat{BEC} = 90^\circ$ , ta có thể sử dụng cách khác như sau:

Hạ  $BH \perp CD$ , suy ra  $ABHD$  là hình chữ nhật, do đó:

$$BH = AD = 17\text{cm},$$

$$CH = CD - DH = CD - AB = 12 - 6 = 6\text{cm}.$$

Trong  $\triangle BHC$  vuông tại H, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 289 + 36 = 325. \quad (1)$$

Trong  $\triangle ABE$  vuông tại A, ta có:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 36 + 64 = 100. \quad (2)$$

Trong  $\triangle CDE$  vuông tại D, ta có:

$$CE^2 = CD^2 + DE^2 = 144 + 81 = 225. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 \Leftrightarrow \Delta BCE \text{ vuông tại } E$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ.$$

## 2. DẤU HIỆU ĐẶC BIỆT NHẬN BIẾT HAI TAM GIÁC VUÔNG ĐỒNG DẠNG

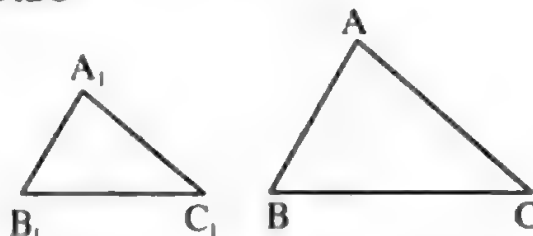
**Định lý:** Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

Như vậy, nếu hai tam giác vuông  $\Delta ABC$  và  $\Delta A_1B_1C_1$  thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} \Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$$

và khi đó ta có ngay:

$$\begin{cases} \widehat{C}_1 = \widehat{C} \text{ và } \widehat{B}_1 = \widehat{B} \\ \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} \end{cases}$$



**Chú ý:** Kết quả của định lý trên được chứng minh một cách khác đơn giản dựa vào định lý Pi - ta - go, thật vậy:

$$\text{Nếu có: } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$$

$$\Rightarrow \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{\sqrt{B_1C_1^2 - A_1B_1^2}}{\sqrt{BC^2 - AB^2}} = \frac{\sqrt{k^2 BC^2 - AB^2}}{\sqrt{BC^2 - AB^2}} = k$$

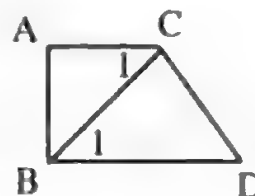
**Thí dụ 3:** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại A,  $AC = 8\text{cm}$ ,  $BC = 12\text{cm}$ . Kẻ tia Cx vuông góc với BC.

Tren Cx lấy điểm D sao cho  $BD = 18\text{cm}$ . Chứng minh rằng  $\Delta ABC \sim \Delta CDB$ .

**Giải**

Xét hai tam giác vuông  $\Delta ABC$  và  $\Delta CDB$ , ta có:

$$\begin{cases} \frac{BC}{DB} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ \frac{AC}{CB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta CDB.$$



**Nhận xét:**

Từ kết quả:  $\Delta ABD \sim \Delta BDC \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Leftrightarrow AC \parallel BD$

$\Rightarrow ABDC$  là hình thang vuông.

### 3. TỈ SỐ HAI ĐƯỜNG CAO, TỈ SỐ DIỆN TÍCH CỦA HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

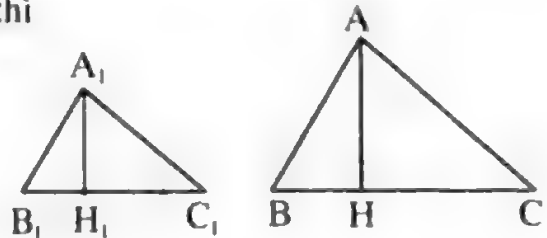
**Định lý:** Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

Như vậy, nếu  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$  với tỉ số  $k$  thì

$$\frac{A_1H_1}{AH} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k$$

và khi đó ta có thêm:

$$\begin{cases} \frac{A_1H_1}{AH} = \frac{B_1H_1}{BH} = \frac{C_1H_1}{CH} \\ \widehat{B_1A_1H_1} = \widehat{BAH} \text{ và } \widehat{C_1A_1H_1} = \widehat{CAH} \end{cases}$$



**Định lý:** Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

Như vậy, nếu  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$  với tỉ số  $k$  thì:  $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = k^2$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Chứng minh rằng:

- a.  $AH^2 = BH \cdot CH$ .      b.  $AB^2 = BH \cdot BC$ .      c.  $AC^2 = CH \cdot BC$ .

**Áp dụng:** Đường cao của một tam giác vuông phát xuất từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài 9cm và 16cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông đó.

**Giải**

- a. Xét hai tam giác vuông  $\Delta AHB$  và  $\Delta CHA$ , ta có:

$$\hat{A}_1 = \hat{C} \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta AHB \sim \Delta CHA \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow AH^2 = BH \cdot CH.$$

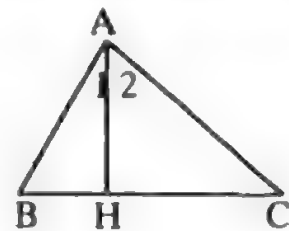
- b. Xét hai tam giác vuông  $\Delta AHB$  và  $\Delta CAB$ , ta có:  $\hat{B}$  góc nhọn chung

$$\Leftrightarrow \Delta AHB \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BH \cdot BC.$$

- c. Xét hai tam giác vuông  $\Delta AHC$  và  $\Delta BAC$ , ta có:  $\hat{C}$  góc nhọn chung

$$\Leftrightarrow \Delta AHC \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = CH \cdot BC.$$

**Áp dụng:** Ta có  $BH = 9\text{cm}$ ,  $CH = 16\text{cm}$  suy ra:



$$AB^2 = BH \cdot BC = 9 \cdot (16 + 9) = 225 \Rightarrow AB = 15\text{cm.}$$

$$AC^2 = CH \cdot BC = 16 \cdot (16 + 9) = 400 \Rightarrow AC = 20\text{cm.}$$

Vậy, ta được  $AB = 15\text{cm}$ ,  $AC = 20\text{cm}$ .

**Chú ý:** Các em học sinh cần nhớ những công thức được xác lập trong ví dụ này, bởi chúng ta được quyền sử dụng nó trong các bài toán tính toán của tam giác vuông.

**Ví dụ 2:** Cho hình bình hành ABCD. Gọi hình chiếu của A trên CD là H, hình chiếu của A trên BC là K.

- Chứng minh rằng  $\triangle AHD \sim \triangle AKB$ .
- Hình bình hành ABCD có thêm điều kiện gì thì các tam giác AHC và AKC đồng dạng với nhau?

*Giải*

- Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1:* Xét hai tam giác vuông  $\triangle AHD$  và  $\triangle AKB$ , ta có:

$$\widehat{D} = \widehat{B} \text{ (góc đối hình bình hành)} \Leftrightarrow \triangle AHD \sim \triangle AKB.$$

*Cách 2:* Ta có:  $S_{ABCD} = AH \cdot CD = AH \cdot AB = AK \cdot BC = AK \cdot AD$

$$\Leftrightarrow AH \cdot AB = AK \cdot AD \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AH}{AK}.$$

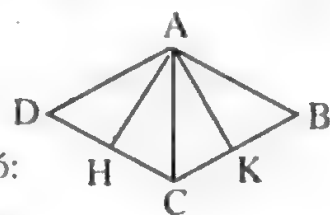
Xét hai tam giác vuông  $\triangle AHD$  và  $\triangle AKB$ , ta có:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AH}{AK} \Leftrightarrow \triangle AHD \sim \triangle AKB.$$

- Các tam giác vuông AHC, AKC đồng dạng với nhau khi và chỉ khi có một cặp góc nhọn bằng nhau, xét hai khả năng:

*Khả năng 1:* Với điều kiện:  $\widehat{ACH} = \widehat{ACK} \Leftrightarrow AC$  là phân giác của góc  $\widehat{C}$   
 $\Leftrightarrow ABCD$  là hình thoi.

*Khả năng 2:* Với điều kiện:  $\widehat{ACH} = \widehat{CAK} \Leftrightarrow AK \parallel CD \Leftrightarrow CK \perp CD$   
 $\Leftrightarrow ABCD$  là hình chữ nhật.



### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông suy từ các trường hợp đồng dạng của tam giác.

**Câu hỏi 2:** Phát biểu các trường hợp đồng dạng đặc biệt của tam giác vuông.

**Câu hỏi 3:** Hai tam giác vuông cân có đồng dạng với nhau không? Tại sao? Nếu cạnh huyền của tam giác vuông cân này gấp đôi cạnh huyền của tam giác vuông cân khác thì tỉ số diện tích của chúng bằng bao nhiêu?

#### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $AC = 4\text{cm}$ ,  $BC = 6\text{cm}$ . Kẻ tia Cx vuông góc với BC. Trên Cx lấy điểm D sao cho  $BD = 9\text{cm}$ . Chứng minh rằng  $\triangle ABC \sim \triangle CDB$ .

**Bài tập 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC = 32\text{cm}$ ,  $BC = 24\text{cm}$ , đường cao BK. Tính độ dài CK.

**Bài tập 3.** Hình thang vuông ABCD có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ , điểm E thuộc cạnh AD. Biết  $AB = 6\text{cm}$ ,  $BE = 10\text{cm}$ ,  $CE = 15\text{cm}$ . Chứng minh rằng  $\widehat{BEC} = 90^\circ$ .

**Bài tập 4.** Hình thang vuông ABCD có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = 3\text{cm}$ ,  $CD = 6\text{cm}$ ,  $AD = 11\text{cm}$ . Lấy điểm E trên cạnh AD sao cho  $DE = 9\text{cm}$ .

a. Hỏi  $\triangle ABE$  đồng dạng với tam giác nào? Vì sao?

b. Chứng minh rằng  $\widehat{BEC} = 90^\circ$ .

**Bài tập 5.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, đường cao AH, biết  $AB = 12\text{cm}$ ,  $BC = 20\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn BH, CH.

**Bài tập 6.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, đường cao AH, biết  $BH = 25\text{cm}$ ,  $CH = 36\text{cm}$ .

a. Tính độ dài các cạnh của  $\triangle ABC$ .

b. Tính chu vi và diện tích của  $\triangle ABC$ .

**Bài tập 7.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, đường cao AH, biết  $BH = 4\text{cm}$ ,  $CH = 6\text{cm}$ . Gọi M là trung điểm của BC.

a. Tính độ dài các cạnh của  $\triangle ABC$ .

b. Tính diện tích  $\triangle AHM$ .

**Bài tập 8.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $AB = 9\text{cm}$ ,  $AC = 12\text{cm}$ . Điểm D thuộc cạnh BC sao cho  $CD = 4\text{cm}$ . Đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E. Không tính độ dài DE, hãy tính diện tích  $\triangle DEC$ .

**Bài tập 9.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A, đường cao BH và tam giác  $A'B'C'$  cân tại A', đường cao B'H'. Biết  $AB = 12\text{cm}$ ,  $BH = 9\text{cm}$ ,  $A'B' = 8\text{cm}$ ,  $B'H' = 6\text{cm}$ . Tính tỉ số diện tích của các tam giác  $\triangle B'H'C'$  và  $\triangle BHC$ .

**Bài tập 10.** Cho  $\triangle ABC$  có ba góc nhọn,  $BC = 15\text{cm}$ , đường cao  $AH = 10\text{cm}$ . Tính cạnh hình vuông MNPQ biết M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC.

**Bài tập 11.** Cho  $\triangle ABC$ , điểm D thuộc cạnh BC. Vẽ DM song song với AC ( $M \in AB$ ), DN song song với AB ( $N \in AC$ ). Biết  $S_{BMD} = a^2$ ,  $S_{DNC} = b^2$ . Chứng minh rằng  $S_{AHK} = (a+b)^2$ .

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 2.** Hạ đường cao AH.

Xét hai tam giác vuông  $\triangle AHC$  và  $\triangle BKC$ , ta có:  $\hat{C}$  chung

$$\text{suy ra: } \triangle AHC \sim \triangle BKC \Leftrightarrow \frac{HC}{KC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow KC = 9\text{cm}.$$

Vậy ta tìm được  $KC = 9\text{cm}$ .

**Bài tập 3.** Tham khảo thí dụ 2.

**Bài tập 4.**

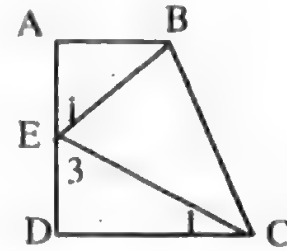
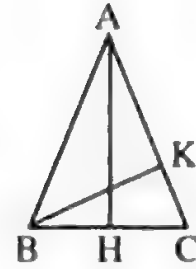
a. Xét hai tam giác vuông  $\triangle ABE$  và  $\triangle DEC$ , ta có:

$$\begin{cases} \frac{AB}{DE} = \frac{1}{3} \\ \frac{AE}{DC} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DC} \Leftrightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC.$$

b. Theo kết quả câu a), ta suy ra:  $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$ .

Mặt khác, trong  $\triangle CDE$  vuông tại D, ta có:  $\widehat{C}_1 = \widehat{E}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{E}_3 = 90^\circ$ .

Khi đó:  $\widehat{BEC} = 180^\circ - \widehat{E}_1 + \widehat{E}_3 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .



**Bài tập 5.** Sử dụng công thức trong ví dụ 1.

**Bài tập 6.** Sử dụng công thức trong ví dụ 1.

**Bài tập 7.** Sử dụng công thức trong ví dụ 1.

**Bài tập 8.** Xét hai tam giác vuông  $\triangle DCE$  và  $\triangle ACB$ , ta có:  $\hat{C}$  chung

$$\text{suy ra: } \triangle DCE \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ACB}} = \left(\frac{CD}{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle DCE} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC = 6\text{cm}^2.$$

Vậy, ta nhận được  $S_{\triangle DCE} = 6\text{cm}^2$ .

**Bài tập 9.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 10.** Giả sử AH cắt MN tại I và hình vuông MNPQ có cạnh bằng x, tức là:  $MN = IH = x$ .

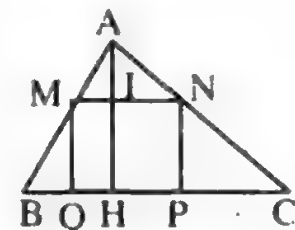
$$\text{Vì } MN \parallel BC \text{ nên } \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}. \quad (1)$$

Xét hai tam giác vuông  $\triangle AMI$  và  $\triangle ABH$ , ta có:  $\hat{A}$  chung

$$\text{suy ra: } \triangle AMI \sim \triangle ABH \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AH}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra: } \frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH} = \frac{AH - IH}{AH} \Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{10 - x}{10} \Leftrightarrow x = 6\text{cm}.$$

Vậy, hình vuông MNPQ có độ dài cạnh bằng 6cm.





**Bài tập 11.** Giả sử  $\triangle ABC$  có diện tích là  $S$ .

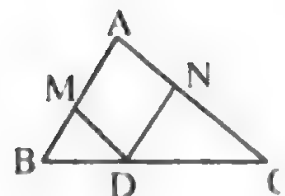
Ta thấy ngay:  $\triangle BDM \sim \triangle DCN$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle BDM}}{S_{\triangle DCN}} = \left( \frac{BD}{CD} \right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{a}{b + a} \Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{a}{a + b}$$

Vì  $DM \parallel AC$  nên  $\triangle BDM \sim \triangle BCA$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle BDM}}{S_{\triangle BCA}} = \left( \frac{BD}{BC} \right)^2 \Rightarrow S = S_{\triangle BDM} \cdot \frac{BC}{BD} = a^2 \cdot \left( \frac{a + b}{a} \right)^2 = (a + b)^2$$



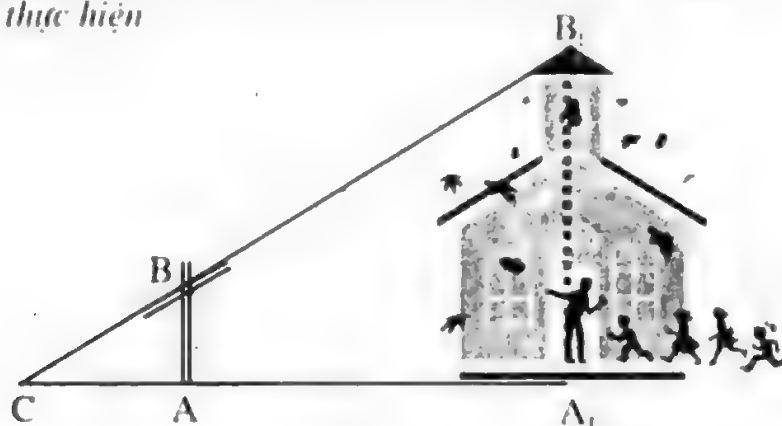
## ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. ĐO GIÁN TIẾP CHIỀU CAO CỦA VẬT

**Bài toán:** Xác định chiều cao của cửa một vật (tòa nhà).

*Phương pháp thực hiện*



Chúng ta sẽ tiến hành theo hai bước:

**Bước 1:** Tiến hành đo đạc

- Đặt cọc AB thẳng đứng trên đó có gắn một thước ngắm quay được quanh một cái chốt của cọc.
- Điều chỉnh thước ngắm sao cho hướng của thước đi qua đỉnh  $B_1$  của toà nhà, sau đó xác định giao điểm C của đường thẳng  $AA_1$  với  $BB_1$ .
- Đo khoảng cách AC,  $AA_1$ .

**Bước 2:** Tính chiều cao

$$\text{Ta có: } \Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC} \Leftrightarrow A_1B_1 = \frac{A_1C \cdot AB}{AC}.$$

**Thí dụ áp dụng:** Nếu ta nhận được số đo của  $A_1C = 7.5\text{m}$ ;  $AB = 1\text{m}$ ;  $AC = 1.5\text{m}$

$$\text{suy ra: } A_1B_1 = \frac{7.5 \cdot 1}{1.5} = 5\text{m}.$$

Vậy, toà nhà có độ cao 5m.

## 2. ĐO KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐỊA ĐIỂM TRONG ĐÓ CÓ MỘT ĐỊA ĐIỂM KHÔNG THỂ TỚI ĐƯỢC

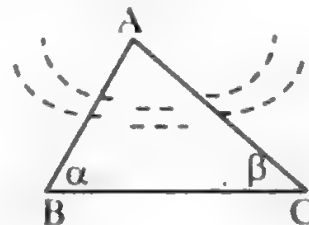
**Bài toán:** Xác định khoảng cách AB, trong đó địa điểm A không thể tới được.

*Phương pháp thực hiện*

Chúng ta sẽ tiến hành theo hai bước:

**Bước 1:** Tiến hành đo đạc

- Chọn một khoảng bằng phẳng rồi vạch một đoạn BC và đo độ dài của nó (giả sử  $BC = a$ ).
- Dùng thước đo góc, đo các góc  $\widehat{ABC} = \alpha$ ,  $\widehat{ACB} = \beta$ .



**Bước 2:** Tính khoảng cách AB

Thực hiện vẽ trên giấy  $\Delta A_1B_1C_1$  thỏa mãn  $B_1C_1 = a$ ,  $\widehat{A_1B_1C_1} = \alpha$ ,  $\widehat{A_1C_1B_1} = \beta$ .

$$\text{Nhận xét rằng: } \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} \Leftrightarrow AB = \frac{A_1B_1 \cdot BC}{B_1C_1}.$$

**Thí dụ áp dụng:** Nếu ta nhận được số đo của:

$$A_1B_1 = 12\text{cm}; B_1C_1 = 3\text{cm}; BC = 15\text{m}$$

$$\text{suy ra: } AB = \frac{12 \cdot 1500}{3} = 6000\text{cm} = 60\text{m}.$$

Vậy, khoảng cách  $AB = 60\text{m}$ .

## II. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu phương pháp thực hiện việc đo chiều cao của của một vật (toà nhà).

**Câu hỏi 2:** Nêu phương pháp thực hiện việc xác định khoảng cách AB, trong đó địa điểm A không thể tới được.

### III. BÀI TẬP ĐỂ NGHỊ

**Bài tập 1:** Tính khoảng cách từ người quan sát đến chân tháp truyền hình cao 50m biết rằng khi người đó đặt một que dài 5cm thẳng phía trước cách mắt 40cm thì que vừa vịn che lấp tháp truyền hình.

**Bài tập 2:** Một người đo chiều cao của một cây nhờ một cọc chôn xuống đất, cọc cao 2m và đặt xa cây 15m. Sau khi lùi cách cọc 0,8m, người ấy nhìn thấy đầu cọc và đỉnh cây cùng nằm trên một đường thẳng. Hỏi cây cao bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ chân đến mắt người ấy là 1,6m.

**Bài tập 3:** Để đo khoảng cách từ địa điểm A đến địa điểm M trên đảo (h.105), người ta gióng đường thẳng AM, lấy trên AM điểm H. Trên đường vuông góc với AM tại H, xác định địa điểm B sao cho  $\angle ABM = 90^\circ$ . Biết  $AH = 15\text{m}$ ,  $AB = 60\text{m}$ . Tính độ dài AM.

### IV. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 1.** *Bạn đọc tự vẽ hình theo lập luận trong lời giải.*

Gọi O là vị trí mắt người quan sát, AB là tháp truyền hình, A'B' là que dài 5cm, OH' và OH theo thứ tự là khoảng cách từ O đến A'B' và AB.

Ta có  $A'B' \parallel AB$  suy ra:

$$\triangle A'OB' \sim \triangle AOB \Leftrightarrow \frac{OH'}{OH} = \frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow OH = \frac{OH' \cdot AB}{A'B'} = 400\text{m}.$$

Vậy, khoảng cách từ người quan sát đến tháp truyền hình là 400m.

**Bài tập 2.** *Bạn đọc tự vẽ hình theo lập luận trong lời giải.*

Trước hết tính BH, ta có:  $\frac{DG}{BH} = \frac{EG}{EH} \Rightarrow \frac{0,4}{BH} = \frac{0,8}{15,8} \Rightarrow BH = 7,9 \text{ (m)}.$

Do đó:  $AB = 7,9 + 1,6 = 9,5\text{m}.$

## ÔN TẬP CHƯƠNG I

**Bài tập 1.** Cho tam giác ABC.

- a. Tìm trên cạnh AB điểm M sao cho  $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ . Tìm trên cạnh AC điểm N sao cho  $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$ .
- b. Vẽ đoạn thẳng MN. Hỏi hai đường thẳng MN và BC có cắt nhau không ? Vì sao ?
- c. Cho biết chu vi và diện tích  $\triangle ABC$  theo thứ tự là P và S. Tính chu vi và diện tích  $\triangle AMN$ .

**Bài tập 2.** Tứ giác ABCD có hai góc vuông đỉnh A và C, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O,  $\widehat{BAO} = \widehat{BDC}$ . Chứng minh:

- [illegible]

**Bài tập 3.** Cho hình chữ nhật ABCD có  $AB = a = 12\text{cm}$ ,  $BC = b = 9\text{cm}$ . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD.

- Chứng minh  $\triangle AHB \sim \triangle BCD$ .
- Tính độ dài đoạn thẳng AH.
- Tính diện tích  $\triangle ABH$ .

**Bài tập 4.** Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O,  $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ . Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Chứng minh rằng:

- a.  $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ .    b.  $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ .    c.  $EA \cdot ED = EB \cdot EC$ .

**Bài tập 5.**  $\triangle ABC$  có ba đường cao  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  đồng quy tại  $H$ . Chứng minh rằng  $AH \cdot DH = BH \cdot EH = CH \cdot FH$ .

**Bài tập 6.** Hai điểm M và K thứ tự nằm trên cạnh AB và BC của  $\Delta ABC$ , hai đoạn thẳng AK và CM cắt nhau tại điểm P. Biết rằng  $AP = 2PK$  và  $CP = 2PM$ . Chứng minh rằng: AK và CM là các trung tuyến của  $\Delta ABC$ .

**Bài tập 7.** Cho hình bình hành ABCD. Từ A kẻ AM vuông góc với BC, AN vuông góc với CD. Chứng minh rằng:  $\triangle MAN \sim \triangle ABC$ . Biết M thuộc BC và N thuộc CD.

**Bài tập 8.** Giả sử AC là đường chéo lớn của hình bình hành ABCD. Từ C, vẽ đường vuông góc CE với đường thẳng AB, đường vuông góc CF với đường thẳng AD. Chứng minh rằng:  $AB.AE + AD.AF = AC^2$ . Biết rằng E và F thuộc phần kéo dài của các cạnh AB và AD.

**Bài tập 9.**  $\Delta ABC$  có hai đường cao là  $AD$  và  $BE$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $DEC$  và  $ABC$  là hai tam giác đồng dạng.

**Bài tập 10.**  $\Delta ABC$  có hai trung tuyến  $AK$  và  $CL$  cắt nhau tại  $O$ . Từ một điểm  $P$  bất kì trên cạnh  $AC$ , vẽ các đường thẳng  $PE$  song song với  $AK$ ,  $PF$  song song với  $CL$ . Các trung tuyến  $AK$ ,  $CL$  cắt đoạn thẳng  $EF$  theo thứ tự tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng các đoạn thẳng  $FM$ ,  $MN$ ,  $NE$  bằng nhau.

**Bài tập 11.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 9\text{cm}$ ,  $AC = 12\text{cm}$ ,  $BC = 15\text{cm}$ .

- Chứng minh rằng  $\Delta ABC$  là tam giác vuông.
- Đường phân giác của góc  $B$  cắt  $AC$  tại  $D$ . Tính độ dài các đoạn  $AD$ ,  $DC$ .
- Đường cao  $AH$  cắt  $BD$  tại  $I$ . Chứng minh:  $AB \cdot BI = BH^2$ .
- Chứng minh  $\Delta AID$  là tam giác cân.

**Bài tập 12.** Cho  $\Delta ABC$ , trung tuyến  $AM$ . Phân giác của góc  $ANB$  cắt  $AB$  tại  $E$ , phân giác của góc  $AMC$  cắt  $AC$  tại  $F$ .

- Chứng minh  $EF \parallel BC$ .
- Cho biết  $ME = MF$ . Chứng minh  $\Delta ABC$  là tam giác cân.

**Bài tập 13.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 8\text{cm}$ ,  $AC = 15\text{cm}$ , đường cao  $AH$ .

- Tính  $BC$ ,  $AH$ .
- Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  lên  $AB$ ,  $AC$ .  
Chứng minh  $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ .

**Bài tập 14.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 18\text{cm}$ ,  $AD = 12\text{cm}$ . Gọi  $E$  là một điểm tùy ý trên cạnh  $AB$ . Tia  $DE$  cắt tia  $CB$  tại  $G$ , cắt  $AC$  tại  $F$ .

- Chứng minh rằng:  $FD^2 = FE \cdot FG$ .
- Tính độ dài các đoạn  $DE$ ,  $DG$ ,  $DF$  trong trường hợp  $E$  là trung điểm của  $AB$ .

**Bài tập 15.** Qua điểm  $O$  trong  $\Delta ABC$ , kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $AC$  và  $BC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ , kẻ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $AB$  và  $BC$  ở  $F$  và  $K$ , kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AB$  và  $AC$  ở  $M$  và  $N$ . Chứng minh:

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{NA} = 1.$$

**Bài tập 16.** Cho  $\Delta ABC$  ( $AB < AC$ ). Đường thẳng kẻ qua trọng tâm  $G$  của tam giác cắt  $AB$ ,  $AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ . Chứng minh:  $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = 3$ .

**Bài tập 17.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Qua  $D$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AB$  tại  $E$ , qua  $C$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $AB$  tại  $F$ .  $CF$  và  $DE$  cắt  $BD$  và  $AC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Từ  $E$  và  $F$  kẻ các đường thẳng song

song với AC và BC cắt BC và AD ở P và Q. Chứng minh rằng M, N, P, Q thẳng hàng.

**Bài tập 18.** Cho hình thoi ABCD cạnh bằng a,  $A = 60^\circ$ . Một đường thẳng đi qua đỉnh C cắt các tia đối của các tia BA, DA theo thứ tự ở M và N.

a. Chứng minh:  $BM \cdot DN = a^2$ .

b. Chứng minh:  $\triangle MBD \sim \triangle BBN$ .

**Bài tập 19.** Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy điểm P thuộc đường chéo BD. Gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

a. Tứ giác AMDB là hình gì ?

b. Gọi E và F là hình chiếu của M trên AD và AB. Chứng minh  $EF \parallel AC$  và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c. Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật AEMF không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

d. Cho  $CP \perp BD$  và  $CP = 2,4\text{cm}$ ;  $\frac{PD}{PC} = \frac{9}{16}$ .

Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

**Bài tập 20.** Cho  $\triangle ABC$ , D là trung điểm của BC, M là trung điểm của AD.

a. BM cắt AC tại P,  $P_1$  là điểm đối xứng của P qua M. Chứng minh rằng:

$$PA = P_1D \text{ và tính tỉ số } \frac{PA}{PC} \text{ và } \frac{AP}{AC}.$$

b. CM cắt AB tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với BC, tính tỉ số  $\frac{PQ}{BC}$  và

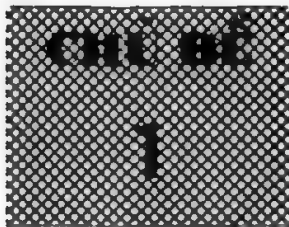
$$\frac{PM}{MB}$$

c. Chứng minh rằng diện tích bốn tam giác BAM, BMD, CAM, CMD bằng nhau. Tính tỉ số diện tích  $\triangle MAP$  và  $\triangle ABC$ .

## **CHƯƠNG II - HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG HÌNH CHÓP ĐỀU**

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được kiến thức về các khối hình đặc biệt trong không gian, cụ thể:

- 1. Hình hộp chữ nhật**
- 2. Hình lập phương**
- 3. Hình lăng trụ đứng**
- 4. Hình chóp đều**
- 5. Hình chóp cụt đều**



# HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐỊNH NGHĨA

**Định nghĩa:** Hình hộp chữ nhật là hình có 6 mặt đều là những hình chữ nhật.

Hình bên cho ta hình ảnh của hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , và ở đó:

1. Hình hộp chữ nhật có:

- 8 đỉnh, cụ thể:

$A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ .

- 12 cạnh, cụ thể:

$AB, BC, CD, DA, A_1 B_1, B_1 C_1, C_1 D_1, D_1 A_1$  – Các cạnh đáy

$AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  – Các cạnh bên

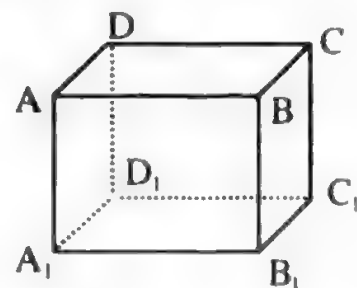
- 6 mặt (đều là hình chữ nhật), cụ thể:

$ABCD, A_1 B_1 C_1 D_1, ABB_1 A_1, BCC_1 B_1, CDD_1 C_1, ADD_1 A_1$ .

2. Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là hai mặt đối diện và có thể xem chúng là hai mặt đáy của hình hộp chữ nhật, khi đó các mặt còn lại được xem là các mặt bên, cụ thể:

- Hai mặt  $ABCD, A_1 B_1 C_1 D_1$  được gọi là hai mặt đáy.

- Bốn mặt  $ABB_1 A_1, BCC_1 B_1, CDD_1 C_1, ADD_1 A_1$  được gọi là các mặt bên.



**Nhận xét:** Như vậy, khi cho hình hộp chữ nhật với ba kích thước  $a, b, c$  chúng ta cần hiểu rằng khi đó ta có:  $AB = a, BC = b, AA_1 = c$ .

**Thí dụ 1:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

a. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với đường thẳng  $B_1 C_1$ .

b. Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp song song với đường thẳng  $AB$ .

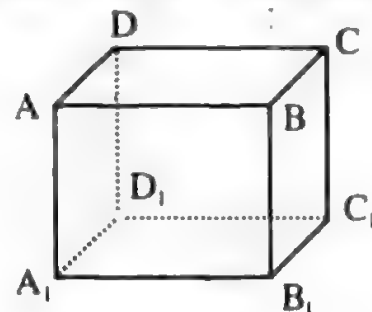
c. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với mặt phẳng  $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

**Giải**

a. Ta có:

- Vì  $BCC_1 B_1$  là hình chữ nhật nên:  $B_1 C_1 \parallel BC$ .

- Vì  $A_1 B_1 C_1 D_1$  là hình chữ nhật nên:  $B_1 C_1 \parallel A_1 D_1$ .





- Vì  $ADD_1A_1$  là hình chữ nhật nên:  $AD \overset{//}{=} A_1D_1 \Rightarrow AD \overset{//}{=} B_1C_1$ .  
 Vậy, tồn tại 3 đường thẳng là  $BC$ ,  $A_1D_1$  và  $AD$  song song với  $B_1C_1$ .

b. Ta có:

$$AB // A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AB // (A_1B_1C_1D_1).$$

$$AB // A_1B_1 \in (A_1B_1CD) \Rightarrow AB // (A_1B_1CD).$$

$$AB // CD \in (CDD_1C_1) \Rightarrow AB // (CDD_1C_1).$$

Vậy, tồn tại 3 mặt phẳng  $(A_1B_1C_1D_1)$ ,  $(A_1B_1CD)$  và  $(CDD_1C_1)$  song song với  $AB$ .

c. Ta có:

$$AB // A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AB // (A_1B_1C_1D_1).$$

$$BC // B_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow BC // (A_1B_1C_1D_1).$$

$$CD // C_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow CD // (A_1B_1C_1D_1).$$

$$AD // A_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AD // (A_1B_1C_1D_1).$$

Ngoài ra, ta có:  $AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Leftrightarrow AA_1C_1C$  là hình bình hành

$$\Leftrightarrow AC // A_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AC // (A_1B_1C_1D_1).$$

$$DD_1 \overset{//}{=} AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \Leftrightarrow BB_1D_1D \text{ là hình bình hành}$$

$$\Leftrightarrow BD // B_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow BD // (A_1B_1C_1D_1).$$

Vậy, tồn tại 6 đường thẳng  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$ ,  $AC$ ,  $BD$  song song với mặt phẳng  $(A_1B_1C_1D_1)$ .

**Thí dụ 2:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ .

- Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng  $(A_1B_1C_1D_1)$ .
- Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng  $(BB_1C_1C)$ .
- Tứ giác  $B_1C_1DA$  là hình gì? Vì sao?

*Giải*

- Ta có:  $\begin{cases} AA_1 \perp A_1B_1, \text{ vì } AA_1B_1B \text{ là hcn} \\ AA_1 \perp A_1D_1, \text{ vì } AA_1D_1D \text{ là hcn} \end{cases}$

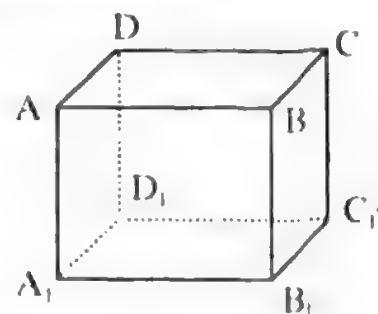
$$\Rightarrow AA_1 \perp (A_1B_1C_1D_1).$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$BB_1 \perp (A_1B_1C_1D_1), CC_1 \perp (A_1B_1C_1D_1), DD_1 \perp (A_1B_1C_1D_1).$$

Vậy, tồn tại 4 đường thẳng  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  vuông góc với mặt phẳng  $(A_1B_1C_1D_1)$ .

- Ta có:  $\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1C_1D_1) \perp (BB_1C_1C).$



$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1BA) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1BA) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1CD) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1CD) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} AB \perp (BB_1C_1C) \\ AB \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (ABCD) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} AB \perp (BB_1C_1C) \\ AB \in (ABC_1D_1) \end{cases} \Rightarrow (ABC_1D_1) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} CD \perp (BB_1C_1C) \\ CD \in (CDD_1C_1) \end{cases} \Rightarrow (CDD_1C_1) \perp (BB_1C_1C).$$

Vậy, tồn tại 6 mặt phẳng  $(A_1B_1C_1D_1)$ ,  $(A_1B_1BA)$ ,  $(A_1B_1CD)$ ,  $(ABCD)$ ,  $(ABC_1D_1)$ ,  $(CDD_1C_1)$  vuông góc với mặt phẳng  $(BB_1C_1C)$ .

c. Vì  $ADD_1A_1$  là hình chữ nhật nên:

$$AD \stackrel{//}{=} A_1D_1 \stackrel{//}{=} B_1C_1 \rightarrow AD \stackrel{//}{=} B_1C_1 \Leftrightarrow B_1C_1DA \text{ là hình bình hành.}$$

$$\text{Mặt khác, ta có: } B_1C_1 \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow B_1C_1 \perp C_1D \Leftrightarrow \widehat{B_1C_1D} = 90^\circ.$$

Vậy, hình bình hành  $B_1C_1DA$  có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

## 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Với hình hộp chữ nhật có ba kích thước  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ta có:

- Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 2(a + b)c$ .
- Diện tích toàn phần:  $S_p = S_{xq} + 2S_d = 2(a + b)c + 2ab = 2(ac + bc + ab)$ .
- Thể tích:  $V = abc$ .

**Thí dụ 3:** Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài bằng 6cm, chiều rộng bằng  $\frac{1}{2}$  chiều dài và chiều cao gấp 3 lần chiều rộng. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

*Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài*, *chiều rộng*,

*chiều cao*, từ giả thiết ta có:  $a = 6\text{cm}$ ,  $b = \frac{1}{2}a = 3\text{cm}$ ,  $c = 3b = 9\text{cm}$ .

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:  $S_{xq} = 2(a + b).c = 162\text{cm}^2$ .

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 162 + 2.6.3 = 198\text{cm}^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:  $V = a.b.c = 162\text{cm}^3$ .

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , biết  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AA_1 = c$ .  
 Tìm mối liên hệ giữa các đại lượng  $a$ ,  $b$ ,  $c$  để tứ giác  $AA_1 C_1 C$  là hình vuông.

*Giải*

$$\text{Ta có: } AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 \parallel CC_1$$

$$\Leftrightarrow AA_1 C_1 C \text{ là hình bình hành.}$$

$$\text{Ta lại có: } AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp A_1 C_1$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AA_1 C_1} = 90^\circ.$$

Khi đó, hình bình hành  $AA_1 C_1 C$  có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Để  $AA_1 C_1 C$  là hình vuông điều kiện là:

$$AA_1 = AC \Leftrightarrow AA_1^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

Vậy, để  $AA_1 C_1 C$  là hình vuông điều kiện là  $c^2 = a^2 + b^2$ .

**Ví dụ 2:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Biết  $AB = 4\text{cm}$ ,  $AC = 5\text{cm}$  và  $A_1 C = 13\text{cm}$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

*Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài*, *chiều rộng*, *chiều cao*. Do vậy, ở đây cần tính thêm  $BC$  và  $AA_1$ .

Áp dụng định lí Pitago vào  $\triangle ABC$ , ta được:

$$BC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}.$$

Từ định nghĩa của hình hộp chữ nhật, ta có:

$$AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp AC$$

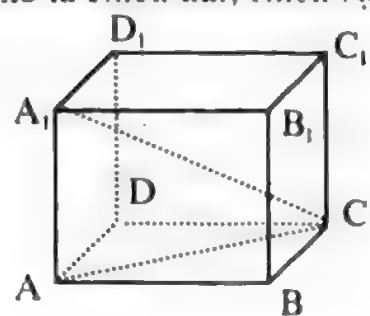
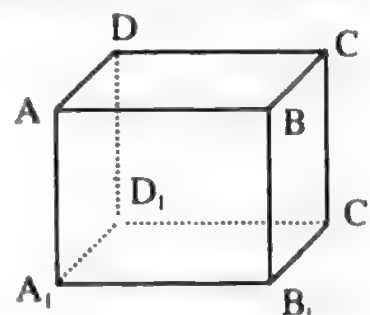
$$\Leftrightarrow \triangle A_1 AC \text{ vuông tại } A.$$

Áp dụng định lí Pitago vào  $\triangle A_1 AC$ , ta được:  $AA_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\text{cm}$ .

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(AB + BC).AA_1 = 168\text{cm}^2.$$



- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_p = S_{xq} + 2S_d = 168 + 2.4.3 = 192\text{cm}^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:  $V = AB.BC.AA_1 = 144\text{cm}^3$ .

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình hộp chữ nhật.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình hộp chữ nhật.

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Hãy nêu tên các hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 đỉnh của hình hộp.

**Bài tập 2.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với đường thẳng  $BC$ .
- Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp song song với đường thẳng  $CD$ .
- Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với mặt phẳng  $(AA_1 B_1 B)$ .

**Bài tập 3.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng  $(BC B_1 C_1)$ .
- Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ .
- Tứ giác  $AA_1 C_1 C$  là hình gì ? Vì sao ?

**Bài tập 4.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , biết  $AB = 6\text{cm}$ ,  $BC = 8\text{cm}$ ,  $AA_1 = x$ .

- Chứng minh rằng  $AA_1 C_1 C$  là hình chữ nhật.
- Tính diện tích của tứ giác  $AA_1 C_1 C$ .
- Tìm  $x$  để tứ giác  $AA_1 C_1 C$  là hình vuông.

**Bài tập 5.** Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài bằng  $6\text{cm}$ , chiều rộng bằng  $\frac{2}{3}$

chiều dài và chiều cao bằng  $\frac{3}{4}$  lần chiều rộng. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

**Bài tập 6.** Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài, chiều rộng và chiều cao tỉ lệ thuận  $a : b : c = 4 : 2 : 1$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó, biết thể tích của nó bằng  $216\text{cm}^3$ .

**Bài tập 7.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Biết  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AC = 10\text{cm}$  và  $A_1 C = 5\sqrt{5}\text{cm}$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

**Bài tập 8.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Biết  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AA_1 = 6\text{cm}$  và  $S_{AA_1 C_1 C} = 30\text{cm}^2$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

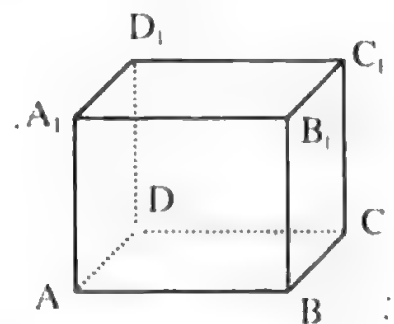
**Bài tập 9.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Biết  $AB = 8\text{cm}$ ,  $BC = 2\text{cm}$  và  $S_{A_1 D_1 C B} = 16\text{cm}^2$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 2.**

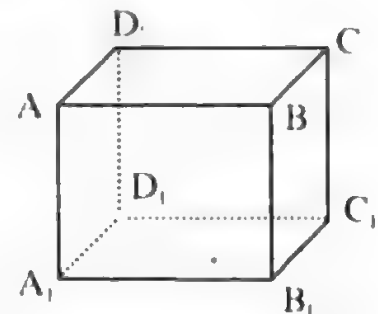
- $BC$  song song với các đường thẳng:  
 $AD, A_1 D_1, B_1 C_1$ .
- $CD$  song song với các mặt phẳng:  
 $AA_1 B_1 B, A_1 B_1 C_1 D_1, ABC_1 D_1$ .
- Mặt phẳng  $(AA_1 B_1 B)$  song song với các đường thẳng:  $CD, C_1 D_1$ .



**Bài tập 3.** Học sinh tự làm.

**Bài tập 4.**

- Ta có:  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 \parallel CC_1$   
 $\Leftrightarrow AA_1 C_1 C$  là hình bình hành.  
Ta lại có:  $AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp A_1 C_1$   
 $\Leftrightarrow \widehat{AA_1 C_1} = 90^\circ$ .



Khi đó, hình bình hành  $AA_1 C_1 C$  có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

- Gọi  $S$  là diện tích của hình chữ nhật  $AA_1 C_1 C$ , ta có:  $S = AA_1 \cdot AC$ .

Trong  $\triangle ABC$ , ta có:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 100 \Leftrightarrow AC = 10\text{cm}$ .

Khi đó:  $S = 10x$ .

- Để  $AA_1 C_1 C$  là hình vuông điều kiện là:  $AA_1 = AC \Leftrightarrow x = 10\text{cm}$ .

Vậy, để  $AA_1 C_1 C$  là hình vuông điều kiện là  $x = 10\text{cm}$ .

**Bài tập 5.** Từ giả thiết ta có:  $a = 6\text{cm}$ ,  $b = 4\text{cm}$ ,  $c = 3\text{cm}$ .

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(a + b) \cdot c = 60\text{cm}^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 60 + 2.6.4 = 108\text{cm}^2$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:  $V = a.b.c = 72\text{cm}^3$ .

**Bài tập 6.** Từ giả thiết ta có:  $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1} \Rightarrow a = 4c, b = 2c$ .

Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = a.b.c \Leftrightarrow 216 = 4c.2c.c \Leftrightarrow c^3 = 27 \Leftrightarrow c = 3\text{cm} \Rightarrow a = 12, b = 6.$$

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(a + b).c = 98\text{cm}^2$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 60 + 2.12.6 = 252\text{cm}^2.$$

**Bài tập 7.** Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài, chiều rộng, chiều cao*. Do vậy, ở đây cần tính thêm BC và  $AA_1$ .

Áp dụng định lý Pitago vào  $\triangle ABC$ , ta được:

$$BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{cm}.$$

Từ định nghĩa của hình hộp chữ nhật, ta có:

$$AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp AC$$

$\Leftrightarrow \triangle AA_1AC$  vuông tại A.

Áp dụng định lý Pitago vào  $\triangle AA_1AC$ , ta được:

$$AA_1 = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - 10^2} = 5\text{cm}.$$

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(AB + BC).AA_1 = 140\text{cm}^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 140 + 2.6.8 = 236\text{cm}^2.$$

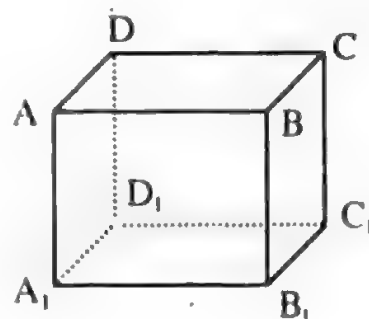
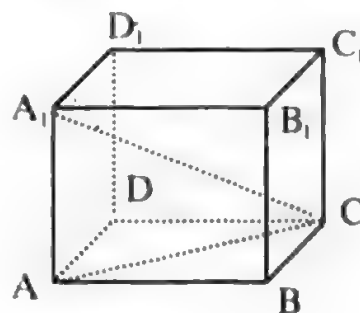
- Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = AB.BC.AA_1 = 240\text{cm}^3.$$

**Bài tập 8.** Ta có:  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 \parallel CC_1$

$\Leftrightarrow AA_1C_1C$  là hình bình hành.

Ta lại có:  $AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp A_1C_1$



$$\Leftrightarrow \widehat{AA_1C_1} = 90^\circ.$$

Khi đó, hình bình hành  $AA_1C_1C$  có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Gọi  $S$  là diện tích của hình chữ nhật  $AA_1C_1C$ , ta có:

$$S = AA_1 \cdot AC \Leftrightarrow 30 = 6 \cdot AC \Leftrightarrow AC = 5 \text{ cm}.$$

Áp dụng định lý Pitago vào  $\triangle ABC$ , ta được:  $BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}.$

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(AB + BC) \cdot AA_1 = 84 \text{ cm}^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_p = S_{xq} + 2S_d = 84 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 108 \text{ cm}^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = AB \cdot BC \cdot AA_1 = 72 \text{ cm}^3.$$

**Bài tập 9.** Thực hiện tương tự bài tập 8.



## HÌNH LẬP PHƯƠNG

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. ĐỊNH NGHĨA

**Định nghĩa:** Hình lập phương là hình có 6 mặt đều là những hình vuông.

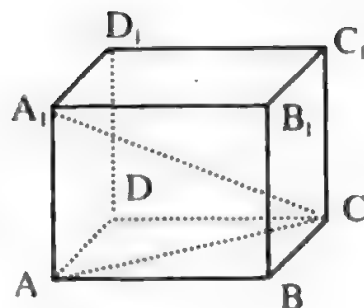
**Nhận xét:** Như vậy, đối với hình lập phương người ta thường phát biểu "  
Cho hình lập phương cạnh bằng  $a$ ".

**Thí dụ 1:** Cho hình lập phương  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- Khi nối  $A_1$  với  $C$  và  $A$  với  $C_1$  thì hai đường thẳng  $A_1C$  và  $AC_1$  có cắt nhau hay không? Và nếu chúng cắt nhau thì có thể vuông góc với nhau được không? Vì sao?
- Câu hỏi tương tự như câu a) với  $A_1C$  và  $B_1D$ .
- Đường thẳng  $AC$  song song với những mặt phẳng nào?
- Đường thẳng  $AC$  vuông góc với những mặt phẳng nào?

*Giải*

- a. Ta có:  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 = CC_1$   
 $\Leftrightarrow AA_1C_1C$  là hình bình hành  
 $\Rightarrow A_1C$  và  $AC_1$  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Giả sử  $A_1C$ ,  $AC_1$  vuông góc với nhau, khi đó:

$AA_1C_1C$  là hình thoi  $\Leftrightarrow AA_1 = A_1C_1 \Leftrightarrow a = a\sqrt{2}$ , mâu thuẫn.

Vậy,  $A_1C$  và  $AC_1$  không có thể vuông góc với nhau.

b. *Bạn đọc tự làm.*

c. Ta có:  $AC \parallel A_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AC \parallel (A_1B_1C_1D_1)$ .

$AC \parallel A_1C_1 \in (A_1C_1B) \Rightarrow AC \parallel (A_1C_1B)$ .

$AC \parallel A_1C_1 \in (A_1C_1D) \Rightarrow AC \parallel (A_1C_1D)$ .

Vậy, tồn tại 3 mặt phẳng  $(A_1B_1C_1D_1)$ ,  $(A_1C_1B)$ ,  $(A_1C_1D)$  song song với  $AC$ .

d. Ta có:  $\begin{cases} AC \perp BB_1 \text{ vì } BB_1 \perp (ABCD) \\ AC \perp BD \text{ vì } ABCD \text{ là hình vuông} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD_1B_1)$ .

Vậy, có đúng mặt phẳng  $(BDD_1B_1)$  vuông góc với  $AC$ .

## 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Với hình lập phương có cạnh bằng  $a$ , ta có:

- Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 4a^2$ .
- Diện tích toàn phần:  $S_p = 6a^2$ .
- Thể tích:  $V = a^3$ .

**Thí dụ 2:** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ , biết  $AC = 2\sqrt{2}$  cm. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

*Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

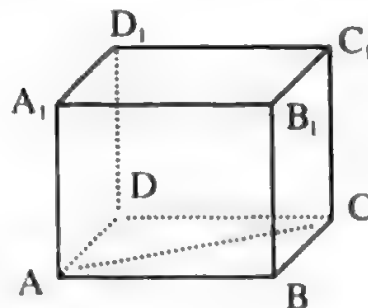
Giả sử hình lập phương có cạnh bằng  $a$ .

Trong  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $B$ , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 8 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow a = 2\text{cm}.$$

Khi đó, hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có:

- Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 4a^2 = 4.2^2 = 16\text{cm}^2$ .
- Diện tích toàn phần:  $S_p = 6a^2 = 6.2^2 = 24\text{cm}^2$ .
- Thể tích:  $V = a^3 = 2^3 = 8\text{cm}^3$ .





## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho hình lập phương  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- Chứng minh rằng  $(AB_1C) \parallel (A_1C_1D)$ .
- Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $O_1$  là giao điểm của  $A_1C_1$  và  $B_1D_1$ . Các đường thẳng  $AO_1$  và  $OC_1$  cắt  $A_1C_1$  theo thứ tự tại  $M, N$ . Chứng minh rằng  $A_1M = MN = NC$ .

**Giải**

- Ta có:  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 \parallel CC_1$   
 $\Leftrightarrow AA_1C_1C$  là hình bình hành  
 $\Rightarrow AC \parallel A_1C_1$ . (1)

Mặt khác, ta cũng có:  $AB \parallel CD \parallel C_1D_1 \Rightarrow AB \parallel C_1D_1$   
 $\Leftrightarrow ABC_1D_1$  là hình bình hành  $\Rightarrow BC_1 \parallel AD_1$ . (2)

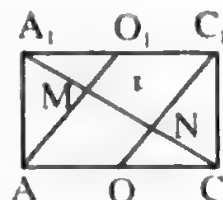
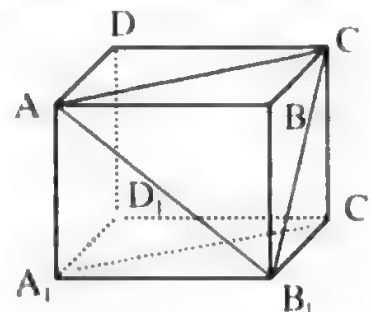
Từ (1), (2) suy ra  $(AB_1C) \parallel (A_1C_1D)$ .

- Ta có:  $OA \parallel O_1C_1 \Leftrightarrow AOC_1O_1$  là hình bình hành  $\Rightarrow AO_1 \parallel OC_1$ .

Trong  $\triangle A_1C_1$ , ta có:  $\begin{cases} A_1O_1 = C_1O_1 \\ O_1M \parallel C_1N \end{cases} \Rightarrow A_1M = MN$ . (3)

Trong  $\triangle MAC$ , ta có:  $\begin{cases} AO = CO \\ ON \parallel AM \end{cases} \Rightarrow CN = MN$ . (4)

Từ (3), (4) suy ra  $A_1M = MN = NC$ .



**Ví dụ 2:** Cho hình lập phương  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  có diện tích mặt chéo  $ACC_1A_1$  bằng  $9\sqrt{2} \text{ cm}^2$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó.

**Giải**

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Giả sử hình lập phương có cạnh bằng  $a$ .

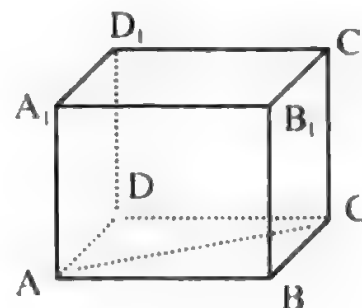
Trong  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $B$ , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow AC = a\sqrt{2}.$$

Diện tích mặt chéo  $ACC_1A_1$  được cho bởi:

$$S = AA_1 \cdot AC \Leftrightarrow 9\sqrt{2} = a \cdot a\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 3 \text{ cm}.$$

Khi đó, hình lập phương  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  có:



- Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 4a^2 = 4.3^2 = 36\text{cm}^2$
- Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = 6a^2 = 6.3^2 = 54\text{cm}^2$
- Thể tích:  $V = a^3 = 3^3 = 27\text{cm}^3$

### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình lập phương.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình lập phương.

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình lập phương  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- Khi nối  $D_1$  với  $B$  và  $B_1$  với  $D$  thì hai đường thẳng  $BD_1$  và  $B_1D$  có cắt nhau hay không? Và nếu chúng cắt nhau thì có thể vuông góc với nhau được không? Vì sao?
- Câu hỏi tương tự như câu a) với  $B_1D$  và  $AC_1$ .
- $BD_1$  và  $AA_1$  có cắt nhau hay không? Vì sao?
- Đường thẳng  $BD$  song song với những mặt phẳng nào?
- Đường thẳng  $BD$  vuông góc với những mặt phẳng nào?

**Bài tập 2.** Cho hình lập phương  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó, biết:

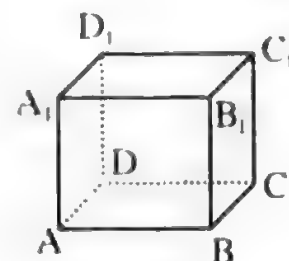
- $AB = 6\text{cm}$ .
- $AC = 4\sqrt{2}\text{ cm}$ .
- $OC = \sqrt{2}\text{ cm}$ , với  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$
- $AC_1 = 3\sqrt{3}\text{ cm}$ .
- $OA_1 = 2\sqrt{3}\text{ cm}$ , với  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

**Bài tập 3.** Cho hình lập phương  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  có diện tích mặt chéo  $ACC_1 A_1$  bằng  $25\sqrt{2}\text{ cm}^2$ . Tính thể tích, diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

### V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

- Khi nối  $D_1$  với  $B$  và  $B_1$  với  $D$  thì hai đường thẳng  $BD_1$  và  $B_1D$  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tuy nhiên,  $BD_1$  và  $B_1D$  không thể vuông góc với nhau được vì nếu vậy thì:  $BD, B_1D$  là hình vuông  $\Leftrightarrow BD = DD_1 < a = a\sqrt{2}$ , mâu thuẫn



b. *Học sinh tự làm.*

c.  $BD_1$  và  $AA_1$  không cắt nhau. Vì nếu cắt nhau chúng sẽ đồng phẳng, điều này là mâu thuẫn.

d. Đường thẳng  $BD$  song song với các mặt phẳng:  $(A_1B_1C_1D_1)$ ,  $(AB_1D_1)$ ,  $(CB_1D_1)$ .

e. Đường thẳng  $BD$  vuông góc với các mặt phẳng:

$(ABB_1A_1)$ ,  $(BCC_1B_1)$ ,  $(CDD_1C_1)$ ,  $(ADD_1A_1)$  – Bốn mặt bên.

$(ACC_1A_1)$ ,  $(BDD_1B_1)$  – Hai mặt chéo.

## Bài tập 2.

a. Ta có ngay:

▪ Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 4a^2 = 4.6^2 = 144\text{cm}^2$ .

▪ Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = 6a^2 = 6.6^2 = 216\text{cm}^2$ .

▪ Thể tích:  $V = a^3 = 6^3 = 216\text{cm}^3$ .

b. Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Trong  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $B$ , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 32 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow a = 4\text{cm}.$$

Khi đó, hình lập phương  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  có:

▪ Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 4a^2 = 4.4^2 = 64\text{cm}^2$ .

▪ Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = 6a^2 = 6.4^2 = 96\text{cm}^2$ .

▪ Thể tích:  $V = a^3 = 4^3 = 64\text{cm}^3$ .

c. *Học sinh tự làm* – Biết  $OC = \frac{1}{2} AC$ .

d. Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Trong  $\triangle ACC_1$  vuông tại  $C$ , ta có:

$$C_1A^2 = AC^2 + C_1C^2 = AB^2 + BC^2 + C_1C^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 27 = 3a^2 \Leftrightarrow a = 3\text{cm}.$$

Khi đó, hình lập phương  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  có:

▪ Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 4a^2 = 4.3^2 = 36\text{cm}^2$ .

▪ Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = 6a^2 = 6.3^2 = 54\text{cm}^2$ .

▪ Thể tích:  $V = a^3 = 3^3 = 27\text{cm}^3$ .

e. *Học sinh tự làm.*

## Bài tập 3. Tham khảo ví dụ 2.



# HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

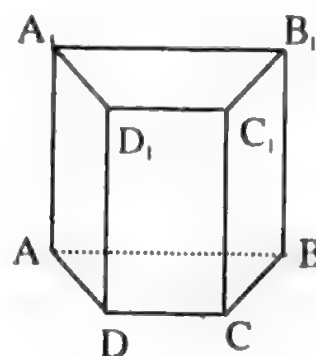
## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐỊNH NGHĨA

**Định nghĩa:** Hình lăng trụ đứng là hình có các mặt bên đều là những hình chữ nhật.

Hình bên cho ta hình ảnh của hình lăng trụ đứng  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , và ở đó:

1. Các điểm  $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$  được gọi là các *đỉnh*.
2. Các đoạn  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  song song với nhau và bằng nhau, chúng được gọi là các *cạnh bên*.
3. Các mặt  $ABB_1 A_1, BCC_1 B_1, CDD_1 C_1, ADD_1 A_1$  là những hình chữ nhật, chúng được gọi là các *mặt bên*.
4. Hai mặt  $ABCD, A_1 B_1 C_1 D_1$  là hai *đáy*.
5. Hình lăng trụ này có đáy là tứ giác nên gọi là *lăng trụ tứ giác*.



**Nhận xét:** Như vậy:

- Hình hộp chữ nhật, hình lập phương cũng là những hình lăng trụ.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.

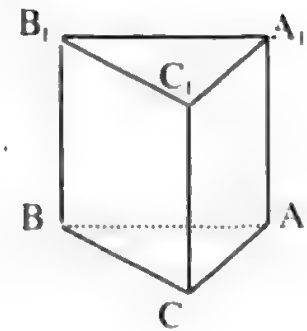
**Thí dụ 1:** Cho hình lăng trụ đứng tam giác  $ABCA_1 B_1 C_1$ .

- a. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.
- b. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.
- c. Sử dụng kí hiệu " $//$ ", " $\perp$ " và " $\in$ " điền vào các ô trong bảng sau:

	$AA_1$	$BB_1$	$CC_1$	$AB$	$BC$	$AC$	$A_1 B_1$	$B_1 C_1$	$A_1 C_1$
$(ABC)$									
$(A_1 B_1 C_1)$									
$(ABB_1 A_1)$									

Giải

- a. Ta chỉ có  $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ .
- b. Ta có:
- $(AA_1B_1B)$ ,  $(BB_1C_1C)$ ,  $(AA_1C_1C)$  cùng vuông góc với  $(ABC)$ .
  - $(AA_1B_1B)$ ,  $(BB_1C_1C)$ ,  $(AA_1C_1C)$  cùng vuông góc với  $(A_1B_1C_1)$ .
- c. Ta có:



	$AA_1$	$BB_1$	$CC_1$	$AB$	$BC$	$AC$	$A_1B_1$	$B_1C_1$	$A_1C_1$
$(ABC)$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\in$	$\in$	$\in$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$
$(A_1B_1C_1)$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\in$	$\in$	$\in$
$(ABB_1A_1)$	$\in$	$\in$	$\parallel$	$\in$	$\perp$	$\perp$	$\in$	$\perp$	$\perp$

## 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

**Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân chiều cao.**

Như vậy, ta có:  $S_{xq} = 2p.h$

trong đó:

- $p$  là nửa chu vi đáy.
- $h$  là chiều cao.

**Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.**

Như vậy, ta có:  $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$ .

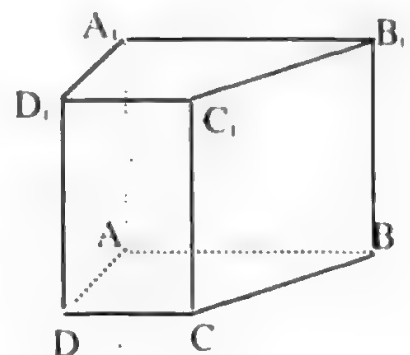
**Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.**

Như vậy, ta có:  $V = S.h$ .

trong đó:

- $S$  là diện tích đáy.
- $h$  là chiều cao.

**Thí dụ 2:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông ( $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ),  $AB = 6\text{cm}$ ,  $CD = 2\text{cm}$ ,  $AD = 3\text{cm}$  và  $AA_1 = 5\text{cm}$ . Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.



**Giải**

Xét hình thang ABCD, hạ CH vuông góc với AB, ta có:

$$CH = AD = 3\text{cm},$$

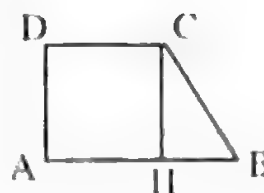
$$BH = AB - AH = AB - CD = 4\text{cm}.$$

Trong  $\Delta HBC$  vuông tại H, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5\text{cm}.$$

Khi đó, ta lần lượt có:

- Diện tích một đáy:  $S_{\text{đáy}} = (AB + CD) \cdot AD = (6 + 2) \cdot 3 = 24\text{cm}^2$ .
- Diện tích xung quanh:  $S_{\text{xq}} = (AB + BC + CD + DA) \cdot AA_1$   
 $= (6 + 5 + 2 + 3) \cdot 5 = 80\text{cm}^2$ .
- Diện tích toàn phần:  $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 80 + 2 \cdot 24 = 128\text{cm}^2$ .
- Thể tích:  $V = S_{\text{đáy}} \cdot h = 24 \cdot 5 = 120\text{cm}^3$ .



## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có đáy ABCD là hình thang cân ( $AB \parallel CD$ ) có AC vuông góc với BD.

- a. Đường thẳng BD và  $A_1C$  có cắt nhau không? Vì sao?
- b. Đường thẳng AD song song với những mặt phẳng nào?
- c. Đường thẳng AC vuông góc với những mặt phẳng nào?
- d. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.
- e. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

**Giải**

- a. Đường thẳng BD và  $A_1C$  không cắt nhau, bởi nếu chúng cắt nhau thì

4 điểm B, C, D,  $A_1$  cùng thuộc một mặt phẳng

$$\Rightarrow A_1 \in (BCD) \Leftrightarrow A_1 \in (ABCD), \text{ mâu thuẫn}$$

- b. Ta có:

$$AD \parallel A_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AD \parallel (A_1B_1C_1D_1).$$

$$AD \parallel A_1D_1 \in (A_1D_1B) \Rightarrow AD \parallel (A_1D_1B).$$

$$AD \parallel A_1D_1 \in (A_1D_1C) \Rightarrow AD \parallel (A_1D_1C).$$

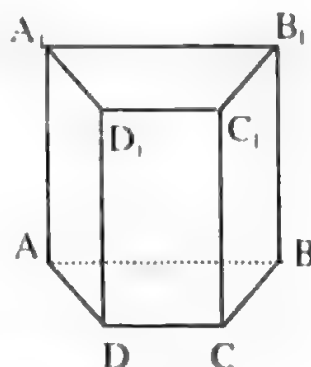
Vậy, có 3 mặt phẳng  $(A_1B_1C_1D_1)$ ,  $(A_1D_1B)$ ,  $(A_1D_1C)$  song song với AD.

- c. Ta có:  $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB_1D_1D).$

Vậy, có duy nhất mặt phẳng  $(BB_1D_1D)$  vuông góc với AC.

- d. Ta có các cặp mặt phẳng song song với nhau là:  $(ABCD) \parallel (A_1B_1C_1D_1)$ ,  $(ABB_1A_1) \parallel (CDD_1C_1)$ .
- e. Dựa trên tính chất của hình lăng trụ đứng ta có ngay các mặt phẳng vuông góc với hai đáy (ABCD) và  $(A_1B_1C_1D_1)$  là:  $(AA_1B_1B)$ ,  $(BB_1C_1C)$ ,  $(CC_1D_1D)$ ,  $(AA_1D_1D)$ ,  $(AA_1C_1C)$ ,  $(BDD_1B_1)$ .

Mặt khác:



- Vì  $AC \perp (BB_1D_1D)$  nên các mặt phẳng chứa AC đều vuông góc với mặt phẳng  $(BB_1D_1D)$ , do đó ta có:  $(ACC_1A_1) \perp (BB_1D_1D)$ ,  $(ACB_1) \perp (BB_1D_1D)$ ,  $(ACD_1) \perp (BB_1D_1D)$ .
- Vì  $BD \perp (ACC_1A_1)$  nên các mặt phẳng chứa BD đều vuông góc với mặt phẳng  $(ACC_1A_1)$ , do đó ta có:  $(BDD_1B_1) \perp (ACC_1A_1)$ ,  $(BDA_1) \perp (ACC_1A_1)$ ,  $(BDC_1) \perp (ACC_1A_1)$ .
- Vì  $A_1C_1 \perp (BB_1D_1D)$  nên các mặt phẳng chứa  $A_1C_1$  đều vuông góc với mặt phẳng  $(BB_1D_1D)$ , do đó ta có thêm:  
 $(A_1C_1B) \perp (BB_1D_1D)$ ,  $(A_1C_1D) \perp (BB_1D_1D)$ .
- Vì  $B_1D_1 \perp (ACC_1A_1)$  nên các mặt phẳng chứa  $B_1D_1$  đều vuông góc với mặt phẳng  $(ACC_1A_1)$ , do đó ta có thêm:  
 $(B_1D_1A) \perp (ACC_1A_1)$ ,  $(B_1D_1C) \perp (ACC_1A_1)$ .

**Ví dụ 2:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABCA_1B_1C_1$  có các cạnh bằng a.

- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.
- Tính tỉ số diện tích của hai tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle A_1BC$ .

**Giải**

- Ta lần lượt có:

- Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = (AB + BC + CA) \cdot AA_1$   
 $= (a + a + a) \cdot a = 3a^2$ .

- Diện tích toàn phần:  $S_p = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$   
 $= 3a^2 + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

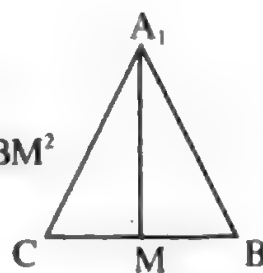
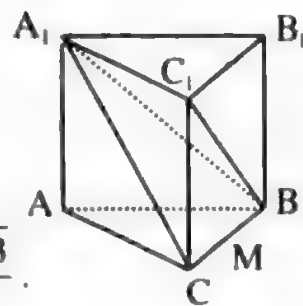
- Thể tích:  $V = S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .

- Gọi M là trung điểm của BC.

- Trong  $\triangle A_1BC$ , ta có:  $A_1M^2 = A_1C^2 - BM^2 = A_1A^2 + AC^2 - BM^2$   
 $= a^2 + a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Leftrightarrow A_1M = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

Ta có:  $S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2} A_1M \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$ .

Khi đó:  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1BC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ .



### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình lăng trụ đứng.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng.

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông ( $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ).

- Hai mặt phẳng  $(AA_1 D_1 D)$  và  $(BB_1 C_1 C)$  có cắt nhau không? Vì sao?
- Đường thẳng  $AD$  song song với những mặt phẳng nào?
- Đường thẳng  $AD$  vuông góc với những mặt phẳng nào?
- Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.
- Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

**Bài tập 2.** Cho hình lăng trụ đứng tam giác  $ABCA_1 B_1 C_1$ , có  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ .

- Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.
- Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.
- Sử dụng kí hiệu " $//$ " và " $\perp$ " điền vào các ô trong bảng sau:

	$AA_1$	$BB_1$	$CC_1$	$AB$	$BC$	$AC$	$A_1 B_1$	$B_1 C_1$	$A_1 C_1$
$(ABC)$									
$(A_1 B_1 C_1)$									
$(ABB_1 A_1)$									

**Bài tập 3.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông ( $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ),  $AB = 12\text{cm}$ ,  $BC = 10\text{cm}$ ,  $CD = 4\text{cm}$  và  $AA_1 = 6\text{cm}$ . Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

**Bài tập 4.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  có đáy  $ABCD$  là hình thang cân ( $AB // CD$ ),  $BC = 4\text{cm}$ ,  $CD = 6\text{cm}$ ,  $\hat{BAD} = 60^\circ$  và  $AA_1 = 4\text{cm}$ . Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

**Bài tập 5.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABCA_1 B_1 C_1$  có các cạnh bằng  $3\text{cm}$ .

- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.
- Tính tỉ số diện tích của hai tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle A_1 B_1 C_1$ .

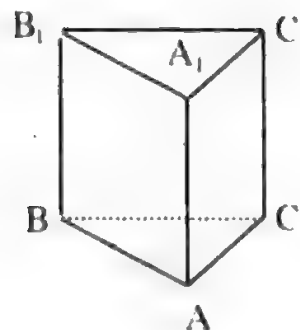
### V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** Tham khảo ví dụ 1.



## Bài tập 2.

- a.  $(ABC) // (A_1B_1C_1)$ .
- b. Ta có:
- $(ABC)$  vuông góc với các mặt phẳng:  $(AA_1B_1B)$ ,  $(BB_1C_1C)$ ,  $(AA_1C_1C)$ .
  - $(A_1B_1C_1)$  vuông góc với các mặt phẳng:  $(AA_1B_1B)$ ,  $(BB_1C_1C)$ ,  $(AA_1C_1C)$ .
  - $(AA_1B_1B) \perp (BB_1C_1C)$
- c. Ta có:

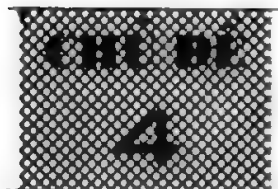


	$AA_1$	$BB_1$	$CC_1$	$AB$	$BC$	$AC$	$A_1B_1$	$B_1C_1$	$A_1C_1$
$(ABC)$	$\perp$	$\perp$	$\perp$				$//$	$//$	$//$
$(A_1B_1C_1)$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$//$	$//$	$//$			
$(ABB_1A_1)$			$//$		$\perp$			$\perp$	

Bài tập 3. Tham khảo thí dụ 2.

Bài tập 4. Học sinh tự làm.

Bài tập 5. Tham khảo ví dụ 2.



# HÌNH CHÓP ĐỀU

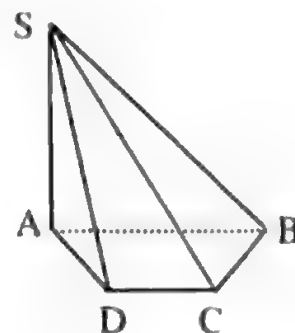
## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. HÌNH CHÓP ĐỀU

**Định nghĩa:** Hình chóp là hình có mặt đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung đỉnh.

Hình bên cho ta hình ảnh của hình chóp  $S.ABCD$ , và ở đó:

1. Điểm  $S$  được gọi là *đỉnh* của hình chóp.
2. Các đoạn  $SA, SB, SC, SD$  được gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
3. Các tam giác  $SAB, SBC, SCD, SAD$  được gọi là các *mặt bên* của hình chóp.
4. Mặt  $ABCD$  là *đáy* của hình chóp.

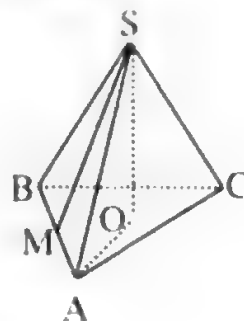


5. Hình chóp này có đáy là tứ giác nên gọi là *hình chóp tứ giác*.

**Định nghĩa:** *Hình chóp đều* là hình chóp có đáy là một đa giác đều, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.

Hình bên cho ta hình ảnh của *hình chóp tam giác đều*  $S.ABC$ , và ở đó:

1. Điểm  $S$  được gọi là *đỉnh* của hình chóp.
2. Các đoạn  $SA, SB, SC$  bằng nhau được gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
3. Các tam giác  $SAB, SBC, SAC$  là các tam giác cân đỉnh  $S$ , chúng được gọi là các *mặt bên* của hình chóp.
4.  $ABC$  là một tam giác đều và nó được gọi là *đáy* của hình chóp.
5. Đoạn  $SM$  (với  $M$  là trung điểm của  $AB$ ) được gọi là *trung đoạn*.
6. Đoạn  $SO$  (với  $O$  là tâm của đáy  $ABC$ ) được gọi là *đường cao*.
6. Hình chóp này có đáy là tam giác nên gọi là *hình chóp tam giác đều*.



**Thí dụ 1:** Cho hình chóp tứ giác đều  $SABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

- a. Chứng minh rằng  $SO \perp (ABCD)$ .
- b. Chứng minh rằng  $(SAC) \perp (SBD)$ .

*Giải*

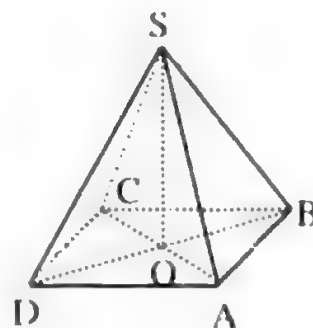
- a. Ta lần lượt có:
  - Trong  $\Delta SAC$ , ta có:  $SA = SC \Leftrightarrow \Delta SAC$  cân tại  $S$   
 $\Rightarrow SO \perp AC.$  (1)
  - Trong  $\Delta SBD$ , ta có:  $SB = SD \Leftrightarrow \Delta SBD$  cân tại  $S$   
 $\Rightarrow SO \perp BD.$  (2)

Từ (1), (2) suy ra  $SO \perp (ABCD)$ .

- b. Từ kết quả câu a), ta có:  $SO \perp AC.$  (3)

Mặt khác, vì  $ABCD$  là hình vuông nên:  $BD \perp AC.$  (4)

Từ (3) và (4) suy ra:  $(SBD) \perp AC \in (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$ .



## 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

**Diện tích xung quanh** của hình chóp đều bằng tích của nửa chu vi với *trung đoạn*.

Như vậy, ta có:  $S_{xq} = p.d$

trong đó:

- $p$  là nửa chu vi đáy.
- $d$  trung đoạn.

**Diện tích toàn phần của hình chóp đều bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.**

Như vậy, ta có:  $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$ .

**Thể tích của hình chóp đều bằng một phần ba tích của diện tích đáy nhân với với chiều cao.**

Như vậy, ta có:  $V = \frac{1}{3} S.h$ .

trong đó: •  $S$  là diện tích đáy.  
•  $h$  là chiều cao.

**Thí dụ 2:** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có các mặt bên là những tam giác đều,  $AB = 4\text{cm}$  và  $O$  là trọng tâm. Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ .

- Tính độ dài các đoạn thẳng  $SO$ ,  $SM$ .
- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

**Giải**

- Nhận xét rằng:  $SA = SB \Leftrightarrow \Delta SAB$  cân tại  $S \Rightarrow SM \perp AB$ .

Trong  $\Delta SMA$  vuông tại  $M$ , ta có:

$$SM^2 = SA^2 - AM^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Leftrightarrow SM = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Trong  $\Delta SOA$  vuông tại  $O$ , ta có:

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 4^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{32}{3}$$

$$\Leftrightarrow SO = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm.}$$

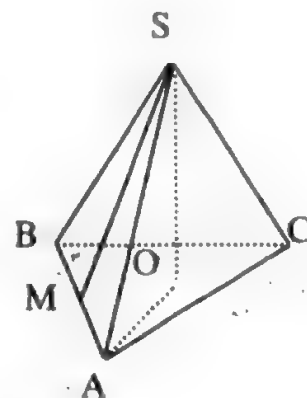
- Ta lần lượt có:

- Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = \frac{1}{2} (AB + BC + CA).SM = \frac{1}{2} (4 + 4 + 4).2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

- Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

- Thể tích:  $V = \frac{1}{3} S_{đáy}.h = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SO = \frac{1}{3} .4\sqrt{3} .\frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ .



## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho hình chóp tứ giác đều  $SABCD$  có chiều cao  $h$  và cạnh đáy bằng  $a$ .

Gọi  $M$ ,  $N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tìm mối liên hệ giữa  $a$  và  $h$  để  $\Delta SMN$  là tam giác đều.

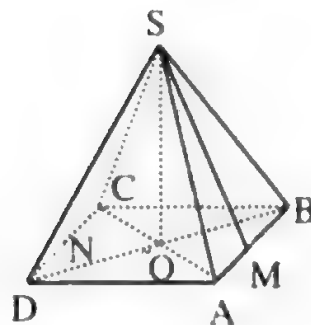
**Giải**

Trong  $\triangle SMN$ , ta có:  $MN = BC = a$

do đó, để  $\triangle SMN$  là tam giác đều điều kiện là:

$$SO = \frac{MN\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy, với  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  thì  $\triangle SMN$  là tam giác đều.



**Ví dụ 2:** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao 15cm và thể tích là  $1280\text{cm}^3$ .

a. Tính độ dài cạnh đáy.

b. Tính diện tích xung quanh.

**Giải**

a. Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều SABCD

$$\text{Từ giả thiết, ta có: } V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot 15 = 5a^2 = 1280$$

$$\Leftrightarrow a = 16\text{cm. Vậy, độ dài cạnh đáy } a = 16\text{cm.}$$

b. Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$S_{\text{xq}} = p \cdot d = \frac{1}{2} (AB + BC + CD + DA) \cdot SM = 32SM.$$

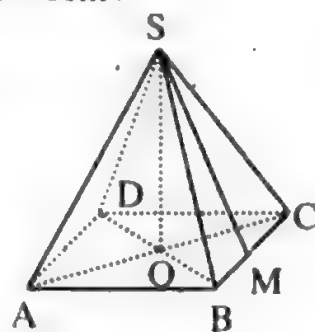
$$\text{Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có: } OM = \frac{1}{2} AB = 8\text{cm.}$$

Trong tam giác vuông SOM ta có:

$$SM^2 = SO^2 + OM^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Leftrightarrow SM = 17\text{cm.}$$

$$\text{Khi đó, ta được: } S_{\text{xq}} = 32 \cdot 17 = 544\text{cm}^2.$$

Vậy, diện tích xung quanh hình chóp bằng  $544\text{cm}^2$ .



### III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình chóp đều.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình chóp đều.

### IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a.

Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

**Bài tập 2.** Cho hình chóp tam giác đều  $SABC$  có các mặt bên là các tam giác đều.

Gọi  $O$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ , biết  $OA = \sqrt{3}$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

**Bài tập 3.** Cho hình chóp tam giác đều  $SABC$  có chiều cao bằng  $a$  và thể tích bằng  $3a^3$ .

- Tính độ dài cạnh đáy.
- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp.

**Bài tập 4.** Cho hình chóp tứ giác đều  $SABCD$  có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng  $a$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

**Bài tập 5.** Cho hình chóp tứ giác đều  $SABCD$  có chiều cao bằng  $a$  và thể tích bằng  $3a^3$ .

- Tính độ dài cạnh đáy.
- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp.

**Bài tập 6.** Cho hình chóp lục giác đều  $SABCDEF$  có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng  $a$ .

- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

**Bài tập 7.** Cho hình chóp lục giác đều  $SABCDEF$  có chiều cao bằng  $a$  và thể tích bằng  $18a^3$ .

- Tính độ dài cạnh đáy.
- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp.

**Bài tập 8.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  có  $AB = BC = 5\text{cm}$ .

$AA_1 = 6\text{cm}$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $A_1 C_1$  và  $B_1 D_1$ .

- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật.
- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp  $OABCD$ .

**Bài tập 9.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ , gọi  $O$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ .

- Chứng minh rằng  $SO \perp (ABC)$ .
- Chứng minh rằng  $(SAO) \perp (SBC)$ .

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

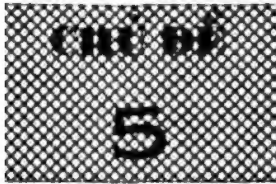
**Bài tập 1.** Tham khảo thí dụ 2.

**Bài tập 2.** Tham khảo thí dụ 2.

**Bài tập 3.** Tham khảo thí dụ 2.

**Bài tập 4.** Tham khảo ví dụ 1.

**Bài tập 5.** Tham khảo ví dụ 1.



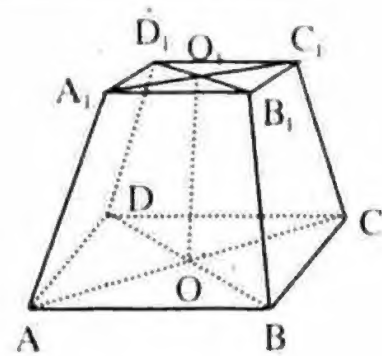
# HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### I. ĐỊNH NGHĨA

**Định nghĩa:** Cắt một hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy, phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy là một hình chóp cắt đều.

Hình bên cho ta hình ảnh của hình chóp cắt đều  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , và ở đó mỗi mặt bên của nó đều là những hình thang cân bằng nhau.



### 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Với hình chóp cắt đều, ta có:

a. Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = \frac{1}{2}(p + p')d$

trong đó:

- $p$  và  $p'$  lần lượt là chu hai đáy
- $d$  là đường cao của mặt bên.

b. Thể tích:  $V_{\text{chóp cắt}} = \frac{1}{3}h.(B + B' + \sqrt{BB'})$

trong đó: –  $B, B'$  là diện tích các đáy

–  $h$  là độ dài đường cao.

## II. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình chóp cắt đều.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình chóp cắt đều.

## III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình chóp tam giác đều  $SABC$  có các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB, SC$ .

- a. Chứng tỏ rằng hình  $ABCA_1 B_1 C_1$  là hình chóp cắt đều.

- b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp cắt đều  $ABCA_1B_1C_1$ .
- c. Tính tỉ số thể tích giữa hình chóp cắt đều  $ABCA_1B_1C_1$  và hình chóp  $SABC$ .

**Bài tập 2.** Cho hình chóp tam giác đều  $SABCD$  có các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1, D_1$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB, SC, SD$ .

- a. Chứng tỏ rằng hình  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  là hình chóp cắt đều.
- b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp cắt đều  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .
- c. Tính tỉ số thể tích giữa hình chóp cắt đều  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  và hình chóp  $SABCD$ .

## ÔN TẬP CHƯƠNG II

**Bài tập 1.** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Hãy chỉ ra:

- a. Hai đường thẳng cắt nhau.
- b. Hai đường thẳng song song.
- c. Hai đường thẳng không cắt nhau và không cùng nằm trên một mặt phẳng.
- d. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng.
- e. Đường thẳng không có điểm chung với mặt phẳng.
- f. Đường thẳng cắt mặt phẳng.
- g. Hai mặt phẳng cắt nhau.
- h. Hai mặt phẳng không cắt nhau.
- i. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

**Bài tập 2.** Một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông, chiều cao của lăng trụ là  $7\text{cm}$ . Độ dài hai cạnh góc vuông của đáy là  $3\text{cm}$  và  $4\text{cm}$ . Hãy tính:

- a. Diện tích một mặt đáy.
- b. Diện tích mặt xung quanh.
- c. Diện tích toàn phần.
- d. Thể tích lăng trụ.

**Bài tập 3.** Thể tích của một hình chóp đều là  $126\text{cm}^3$ , chiều cao của hình chóp là  $6\text{cm}$ . Tính diện tích đáy của nó.

**Bài tập 4.** Cho hình chóp cắt tứ giác đều  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có các cạnh đáy là  $a$  và  $2a$ , chiều cao của mặt bên là  $a$ .

- a. Tính diện tích xung quanh của hình chóp cắt.
- b. Tính độ dài cạnh bên và chiều cao hình chóp cắt.

**Bài tập 5.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có  $AB = 4\text{cm}$ ,  $AC = 5\text{cm}$  và  $A_1C = 13\text{cm}$ . Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

**Bài tập 6.** Một bể nước hình hộp chữ nhật, dài 3,9m. Lúc đầu bể không chứa nước. Người ta lắp một vòi nước chảy vào bể, mỗi phút chảy được 48 lít. Sau 65 phút mực nước trong bể cao 0,4m.

- Tính chiều rộng của bể.
- Người ta cho một vòi vào chảy tiếp 07,5 phút nữa thì đầy bể. Hỏi bể cao bao nhiêu?

**Bài tập 7.** Cho hình lập phương  $DEGH.MNPQ$ . Gọi  $O$  và  $O_1$  lần lượt là giao điểm của các đường chéo  $DG$  và  $EF$ ,  $MP$  và  $NQ$ . Biết cạnh hình lập phương bằng 8cm.

- Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương.
- Tính thể tích của hình chóp  $O_1.DEGF$ .
- Tính thể tích của hình chóp  $N.DEG$ .

**Bài tập 8.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy  $AB = 8\text{cm}$ , cạnh bên  $SA = 12\text{cm}$ .

- Tính chiều cao  $SO$  rồi tính thể tích của hình chóp.
- Tính diện tích toàn phần của hình chóp.



**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại : (04) 9 724852 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 99 14899

---

*Chịu trách nhiệm xuất bản*

**Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO**  
**Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH**

*Biên tập*  
**Hải Đăng**

*Chế bản*  
**NS. Bình Thạnh**

*Trình bày bìa*  
**Xuân Duyên**

**Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG, VIỆT**

**Địa chỉ :**

2bisA Đinh Tiên Hoàng - P.Đakao - Q.1 - TP HCM

ĐT : 08 9111564 - Fax : 08 9102915

Email: [binhthanhbookstore@yahoo.com](mailto:binhthanhbookstore@yahoo.com)

---

**ĐỀ HỌC TỐT TOÁN 8 TẬP 2**

Mã số : 1L – 250 DH2007

In 3.000 cuốn, khổ 16x24 cm, tại Công ty in VIỆT HƯNG.

Số xuất bản : 769 – 2007/CXB/06 – 114/DH-QGHN ngày 21/09/2007.

Quyết định xuất bản số : 576 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2008.